

安定多様体法を用いたクアドロータの飛行制御に関する研究

M2022SC003 石王宏和

指導教員：坂本登

1 はじめに

無人航空機システム（Unmanned Aerial Systems）は物流や災害救助，地形調査など様々な分野や用途で利用されている．近年ではオリンピックの演出や地震などの自然災害発生時の支援にも使われている．UASの中でも，一般的にドローンと呼ばれる4つのロータが剛性のあるクロスフレームに固定された構成であるクアドロータは特に人気がある．その理由として，ホバリングができること，機敏で操作性が高いこと，使用目的や使用対象者が幅広いことが挙げられる．

クアドロータの制御の研究を行う中で飛行実験時に離陸直後など姿勢角が安定せずに高度の急降下や墜落することが度々発生した．この問題を解決するために姿勢角速度の安定化性能を向上させることによって姿勢角を安定させようと考えた．本研究では線形最適制御と非線形最適制御を用いて姿勢角速度の安定化性能の向上を目指す．非線形最適制御問題では当研究室の坂本登教授らにより提案された Hamilton-Jacobi 方程式の近似解法である安定多様体法を用いる．

2 クアドロータのモデリング

2.1 座標系とパラメータ

クアドロータは3次元空間を運動しており，クアドロータの空間表現を行うためには並進位置と姿勢角が必要である．これらの状態量を表現するためには，2つの直交座標系を用いる必要がある．用いる2つの直交座標系とは，慣性座標系（ Σ_w ）と機体座標系（ Σ_b ）である．これらの座標系は右手座標系であり，座標系とクアドロータの3Dモデルを図1に示す．

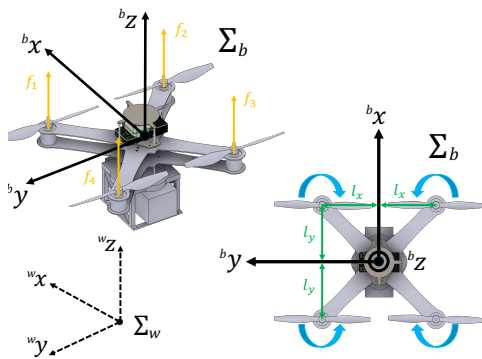


図1 座標系とクアドロータの3Dモデル図

2.2 クアドロータの運動方程式

本研究ではニュートン・オイラー法を用いてクアドロータの運動方程式を導出する[1]．クアドロータの運動方程式の流れを図2に示す．

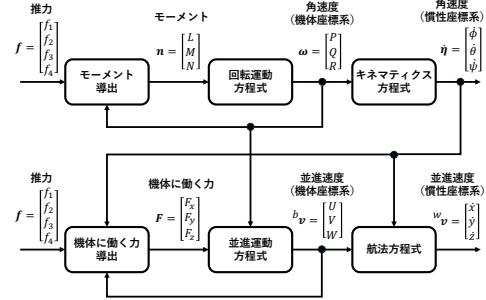


図2 クアドロータの運動方程式の流れ

2.2.1 座標系変換の回転行列

直交座標系において， x 軸， y 軸， z 軸まわりの回転行列を，それぞれ $R_x(\phi)$ ， $R_y(\theta)$ ， $R_z(\psi)$ としたとき，ZYX(3-2-1) オイラー角における機体座標系から慣性座標系への回転行列 wR_b は，式(2.4)となる[2]．また，慣性座標系から機体座標系への回転行列は wR_b を転置したものである．

$$R_x(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

$${}^wR_b = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi) \quad (2.4)$$

2.2.2 回転運動に関する運動方程式

機体座標系における角運動量を h ，角速度を ω ，機体に働くモーメントの総和を n とする．この時の回転運動方程式は，

$$\dot{h} + \omega \times h = n \quad (2.5)$$

となる．機体に働くモーメントの総和 n は，推力 $u = [f_1, f_2, f_3, f_4]^T$ ，プロペラや機体の形状等によって定まる空力特性に依存するパラメータである μ ， ρ_1 を用いて

$$n = \begin{bmatrix} l_y & -l_y & -l_y & l_y \\ -l_x & -l_x & l_x & l_x \\ -\mu & \mu & -\mu & \mu \end{bmatrix} u - \rho_1 \omega \quad (2.6)$$

となる．ここで慣性テンソル $\mathbf{I}$ と角速度 $\boldsymbol{\omega}$ を用いて角運動量 $\mathbf{h}$ を表すことにより，機体座標系における回転運動方程式は式 (2.7) となる [1]．

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = \mathbf{n} \quad (2.7)$$

また，慣性座標系における姿勢角を $\boldsymbol{\eta}$ とした時，機体座標系における角速度 $\boldsymbol{\omega}$ と慣性座標系における角速度 $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ の関係式は

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin\theta \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi\cos\theta \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{\omega} \quad (2.8)$$

となる．式 (2.8) は ZYX(3-2-1) オイラー角を用いたキネマティクス方程式と呼ばれる．

2.2.3 並進運動に関する運動方程式

機体座標系における並進速度を ${}^b\mathbf{v}$ ，機体の質量を m ，機体にはたらく力を ${}^b\mathbf{F}$ とした時の並進運動方程式は，

$$m(\dot{{}^b\mathbf{v}} + (\boldsymbol{\omega} \times {}^b\mathbf{v})) = {}^b\mathbf{F} \quad (2.9)$$

となる [1]．機体にはたらく力 ${}^b\mathbf{F}$ には，推力，重力，粘性抵抗力が挙げられる．空力特性に依存するパラメータを ρ_2 ，重力加速度を g ， $\mathbf{e} = [0, 0, 1]^T$ としたとき，機体にはたらく力 ${}^b\mathbf{F}$ は，

$$u_f = \sum_{i=1}^4 f_i \quad (2.10)$$

$${}^b\mathbf{F} = u_f \mathbf{e} - {}^w\mathbf{R}_b(mg\mathbf{e}) - \rho_2 {}^b\mathbf{v} \quad (2.11)$$

となる [2]．機体座標系における並進加速度 $\dot{{}^b\mathbf{v}}$ と慣性座標系における並進加速度 $\ddot{\mathbf{x}}$ の関係は，式 (2.4) の回転行列を用いて式 (2.12) と表せる．

$$\dot{{}^b\mathbf{v}} = {}^w\mathbf{R}_b \ddot{\mathbf{x}} \quad (2.12)$$

3 最適制御

3.1 線形最適制御

状態変数を $\mathbf{x}$ ，入力を $\mathbf{u}$ とする次のような線形システムについて考える．

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.1)$$

このシステムに対する評価関数は，重み係数行列 $\mathbf{Q}$ ， $\mathbf{R}$ を用いて

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad (3.2)$$

となる [3]．評価関数 J を最小にする最適入力 $\mathbf{u}$ を求めるために Riccati 方程式 (3.3) を解く．

$$\mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (3.3)$$

式 (3.3) を解いて求めた $\mathbf{P}$ を用いて最適フィードバックゲイン $\mathbf{K}$ は，

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (3.4)$$

となる [3]．評価関数 (3.2) を最小にする最適入力 $\mathbf{u}$ は，式 (3.5) となる．

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x} \quad (3.5)$$

3.2 非線形最適制御

次のような非線形システムについて最適制御問題を考える [4]．

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (3.6)$$

$$J = \int_0^\infty \mathbf{x}(t)^T \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t)^T \mathbf{R} \mathbf{u}(t) dt \quad (3.7)$$

ただし， $\mathbf{Q} \geq 0$ ， $\mathbf{R} > 0$ ， $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ， $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ である．安定多様体法を用いた非線形最適制御問題は図 3 に示すような流れで非線形最適入力を求める [5]．

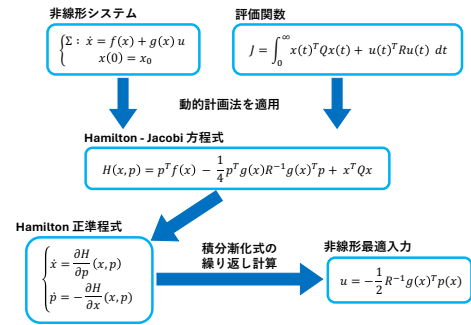


図 3 非線形最適入力導出の流れ

動的計画法を用いて非線形システム (3.6) の Hamilton-Jacobi 方程式を導出すると，

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{p}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{4} \mathbf{p}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad (3.8)$$

になる [5][6]．しかし，Hamilton-Jacobi 方程式を解くことは一般的に困難であるとされている．そこで Hamilton-Jacobi 方程式の解を求めるために安定多様体法を用いる．安定多様体法は，当研究室の坂本登教授らによって提案された Hamilton-Jacobi 方程式の近似解法である．Hamilton-Jacobi 方程式 (3.8) において， $\mathbf{p}$ ， $\mathbf{x}$ について偏微分することによって，Hamilton の正準方程式を求める．Hamilton の正準方程式は式 (3.9) となる [4][5][6]．

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ \quad = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \\ \quad = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})^T \mathbf{p} + \frac{1}{4} \frac{\partial (\mathbf{p}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{x})^T \mathbf{p})}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{x}} \end{cases} \quad (3.9)$$

次に式 (3.10) の連立微分方程式系 Σ について考える [4].

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x} = Fx + n_s(t, x, y) \\ \dot{y} = Fy + n_u(t, x, y) \end{cases} \quad (3.10)$$

ただし, $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$ は安定行列であり, $n_s(t, x, y)$ と $n_u(t, x, y)$ は滑らかな非線形関数とする. 任意のパラメータ $\xi \in \mathbb{R}^n$ を用いて関数列を式 (3.11) と定義する [4].

$$\begin{cases} x_{k+1} = e^{Ft} \xi + \int_0^t e^{F(t-s)} n_s(s, x_k(s), y_k(s)) ds \\ y_{k+1} = - \int_t^\infty e^{-F^T(t-s)} n_u(s, x_k(s), y_k(s)) ds \end{cases} \quad (3.11)$$

ここで, $k = 0, 1, 2, \dots$, において

$$\begin{cases} x_0 = e^{Ft} \xi \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

とする.

非線形システム (3.6) において, 線形部分の Riccati 方程式の安定化解 P が存在すれば, 正準方程式をブロック対角化した後に漸化式 (3.11), (3.12) を用いることによって正準方程式の近似解を得られる. 得られた近似解から $p(x)$ が得ることができ, 式 (3.13) より非線形最適入力を得られる. このアルゴリズムは $k = 0$ で線形最適制御と一致し, 近似回数 k を増やしていくと求めたい非線形最適制御に収束する.

$$u^* = -\frac{1}{2} R^{-1} g(x)^T p(x) \quad (3.13)$$

この手法は, 漸化式の計算によって解を得ることによって方程式を解く必要がないため, 計算機上で実現させやすい. そのため, 安定多様体法は近似精度や計算量の面で優れているとされており, アクロボットシステムのような非線形系システムに対して有用性と実用性が示されている.

4 シミュレーション

4.1 角速度の安定化制御

式 (2.7) より線形近似を用いて線形システムは,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ A &= -J^{-1} \rho_2, \quad B = J^{-1} \end{aligned} \quad (4.1)$$

となる. 重み行列 Q, R を,

$$Q = \begin{bmatrix} 0.0043 & 0.0000 & 0.0020 \\ 0.0000 & 0.0040 & 0.0020 \\ 0.0020 & 0.0020 & 0.0055 \end{bmatrix}, \quad R = 0.03 \quad (4.2)$$

として, Riccati 方程式を解いて最適フィードバックゲイン K を得る.

また, 式 (2.7) より非線形システムを

$$\dot{\omega} = J^{-1}(-\omega \times I\omega) - J^{-1} \rho_2 \omega + J^{-1} n_f \quad (4.3)$$

とする. 非線形最適制御で用いる重み行列は線形最適制御と同じものを用いる. 安定多様体法を用いて非線形最適制御問題を解くことで非線形最適入力を算出する制御器を求める [8]. 今回のシミュレーションで用いる制御器は, 80 [deg/s] から -80 [deg/s] の領域において角速度の安定化ができるものであり, 式 (3.11) にある近似回数 k を $k = 5$, 任意パラメータ ξ を $\xi = 0.25$, ξ の個数 (シューティング線の数) を 7838 として生成した. Hamiltonian の値は 0 に近いほど精度が良いとされ, 今回の条件では $2.2274 \times 10^{-7} \leq \text{Hamiltonian} \leq 6.0770 \times 10^{-4}$ である. また, 安定多様体法アルゴリズムの計算結果を用いて求められる最適制御入力は状態変数を用いた多項式で近似され, 本研究では各状態変数について最大 5 次元の多項式近似を行う. 初期値を $\omega_0 = [80, 80, 10]$ [deg/s] として, 求めた最適フィードバックゲインと非線形最適入力を算出する制御器に関して角速度 ω の安定化シミュレーションを行う. シミュレーションは MATLAB を用いて行う. シミュレーションの結果, 非線形最適制御の方が評価関数が 7 割ほど優れている事がわかった.

4.2 クアッドロータの飛行制御

続いて, クアッドロータの飛行シミュレーションを行う. フライトシミュレータの roll 角制御部と pitch 角制御部にあたる姿勢角制御部の構造を図 4 に示す. このシミュレータの姿勢角制御は PI 制御と安定化制御を組み合わせている. この安定化制御部分に求めた最適フィードバックゲインと非線形最適入力を算出する制御器を適用させる. roll 角に関して, 初期値は 0 [deg], 目標値はシ

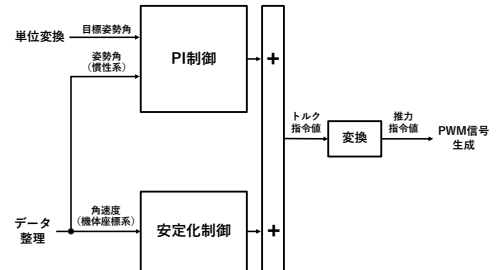


図 4 姿勢角制御の構造

ミュレーション開始から 5 秒で 10 [deg], シミュレーション開始から 25 秒で 0 [deg] とする. pitch 角に関しては, 初期値は 0 [deg], 目標値はシミュレーション開始から 15 秒で 10 [deg], シミュレーション開始から 35 秒で 0 [deg] とする. 角速度 (R) の目標値は常に 0 [deg/s] とする.

クアッドロータの飛行シミュレーション結果として, 図 5 に roll 角の応答, 図 6 に角速度 P の応答を示す. 赤線は目標値, 水色の線は当研究室で使用している安定化制御のゲインを用いた時の応答, 青色の線は線形最適制御による入力ゲインを用いた時の応答, ピンク色の線は安定多様体法を用いた非線形最適制御による制御器を用いた時の応答を示している.

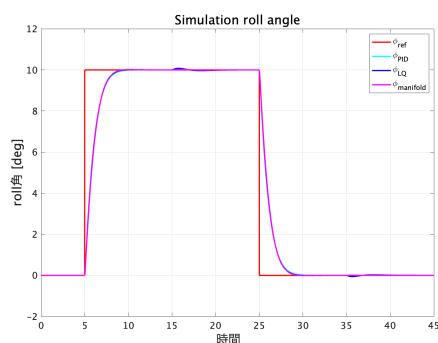


図 5 roll 角の応答

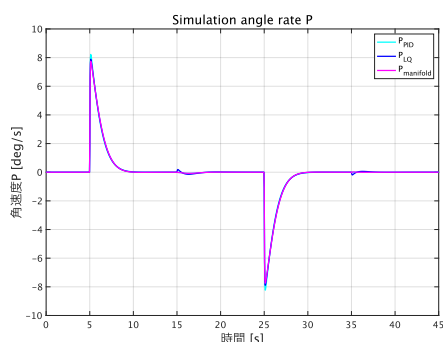


図 6 角速度 P の応答

図 5 より、いずれの制御手法でも応答はほぼ同じであるが、非線形最適制御を用いた場合は姿勢角を変化させた際に発生する振動を最も抑制する事ができた。図 6 より、非線形最適制御を用いた場合に最も角速度を抑制できている。これにより姿勢角の変化を抑えている。これはクアドロータの操作性向上に繋がる。次に外乱トルクを与えたシミュレーションの角速度応答を図 7 に示す。

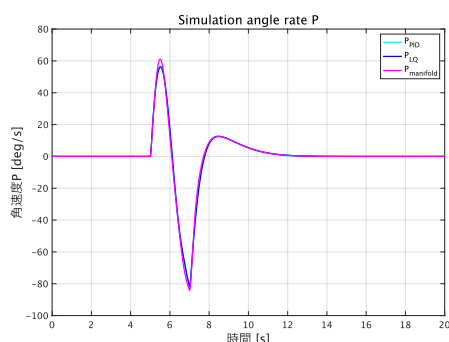


図 7 外乱トルクを与えた時の角速度 P の応答

図 7 より、飛行シミュレーションの結果と異なり、外乱トルクを与えたシミュレーションでは非線形最適制御を用いた場合が最も大きい角速度応答となった。

5 おわりに

本論文ではクアドロータの角速度フィードバックを用いた安定化制御に関して述べた。安定化制御の手法として、線形最適制御と非線形最適制御を用いた。線形最適制御は Riccati 方程式を解くことで最適フィードバックゲインを求める事ができ、非線形最適制御は坂本登教授らによって提案された安定多様体法を用いて Hamilton-Jacobi 方程式を解くことで非線形最適入力を求める事ができる。これらの安定化制御を用いたクアドロータの飛行シミュレーションを行い、安定化制御の性能評価を行なった。本研究での飛行シミュレーションでは安定多様体法を用いた非線形最適制御による安定化制御が働いており、姿勢角の安定化性能の向上が確認できた。しかし、外乱トルクに対しては飛行シミュレーションの時ほどの性能は確認できなかった。ゆえに、安定多様体法を用いて制御器を設計する際にパラメータや重み行列の変更など改善の余地がある。また、本研究ではシミュレーション上でのみ性能を評価したが、様々な外的要因が発生する実機実験での性能評価では今回と異なる結果となる可能性がある。

参考文献

- [1] 坂本 登：“ビークル系のモデリングと制御”，南山大学大学院機械工学研究講義資料，2021.
- [2] 野波 健藏：“ドローン工学入門 モデリングから制御まで”，コロナ社，2020.
- [3] 吉川 恒夫，井村 順一：“現代制御論”，コロナ社，2014.
- [4] Noboru Sakamoto：“Case studies on the application of the stable manifold approach for nonlinear optimal control design”，Automatica, Vol. 49, No.2, pp.568-576, 2013.
- [5] 橋本 龍司：“座標変換を用いた状態制約付き非線形最適制御器設計”，2019 年度修士論文，南山大学理工学研究科機械電子制御工学専攻 坂本・中島研究室，2020.
- [6] 竹田 賢矢：“非線形最適制御による並列回転型倒立振子の振り上げ安定化制御”，2020 年度修士論文，南山大学理工学研究科機械電子制御工学専攻 坂本・中島研究室，2021.
- [7] Noboru Sakamoto, Arjan J. van der Schaft：“Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the Hamilton-Jacobi equation”，IEEE Transactions on Automatic Control, 53(10), 2335-2350, 2008.
- [8] Noboru Sakamoto：“The stable manifold method for approximate solution of the Hamilton-Jacobi equation — Guide for Matlab program set”，南山大学理工学研究科機械電子制御工学専攻 坂本・中島研究室，2017.