頑健性を持つ航空ネットワーク設計モデルに関する研究

M2016SS003 服部晃大

指導教員：佐々木美裕

1 はじめに

本研究では, 需要量に不確実性を含むハブ空港配置モデルの提案を行う．従来のハブ空港配置モデルや航空ネットワーク設計モデルでは, 需要量や輸送コストなどの値は確定した値として扱っていることが多い．しかし, これらの値は一般的に変動するものである．この点を考慮したモデルとして確率最適化を用いたモデルとロバスト最適化を用いたモデルが挙げられる．しかし, 前者に比べ後者はあまり研究が進められていない．そこで, 本研究ではロバスト最適化を用いたハブ空港配置モデルを提案し, 提案するモデルの解と従来のモデルとの比較を行い, それぞれの最適なハブネットワークの違いおよび特徴を調べ, 最適ネットワークに影響を与える要因について分析する．

2 2 次錐計画問題

福田・福島 [?] によると, 2 次錐計画問題とは, 2 次錐制約と呼ばれる特別な制約条件の下で, 目的関数を最小化または最大化する数理計画問題であり, ロバスト最適化をはじめ, 様々な数理最適化のモデリングに用いられている．

ベクトル $z \in \mathbb{R}^l$ を $z := (z_0, \overline{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{l-1}$ と表す．2 次錐計画問題とは, 以下の形をした 2 次錐制約をもつ最適化問題である．

$$\begin{aligned} \text{min.} \quad & f(x) \\ \text{s.t.} \quad & g(x) \in \mathcal{K} \\ & h(x) = 0 \end{aligned}$$

ここで, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ であり, $\mathcal{K} := \mathcal{K}_1 \times ... \times \mathcal{K}_r$ は 2 次錐の直積, $\mathcal{K}_i$ はそれぞれ m_i 次元の 2 次錐, すなわち

$$\mathcal{K}_i = \begin{cases} \{(z_0, \overline{z}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m_i - 1} : z_0 \geq \|\overline{z}\|\} \ (m_i \geq 2) \\ \{z \in \mathbb{R} : z \geq 0\} \ (m_i = 1) \end{cases}$$

で定義される集合である．ただし, $m_1 + ... + m_r = m$ であり, $\| \cdot \|$ はユークリッドノルムを示す．

2 次錐計画問題は内点法によって, 効率的に解けることが知られている [?].

3 ロバスト最適化

ロバスト最適化とは, 不確実なデータを取りうる範囲 $\mathcal{U}$ をあらかじめ想定して, その中における最悪のケースの最適化という形で定式化する手法である．

以下のような線形不等式制約をもつシンプルな形をした線形計画問題について考える．

$$\begin{aligned} & \text{min. } c^\top x \\ & \text{s.t. } a^\top x \leq b \end{aligned}$$

この線形計画問題の制約式の係数 a が不確実であり, 不確実性集合 $\mathcal{U}$ に含まれると仮定して, 次のようにロバスト最適化問題を定式化する．

$$\begin{aligned} & \text{min. } c^\top x \\ & \text{s.t. } a^\top x \leq b \quad a \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

ロバスト最適化問題ではどのような不確実性集合 $\mathcal{U}$ を与えたら扱いやすい問題に帰着できるかという視点から研究が進められている．一般に $\mathcal{U}$ を矩形として与える問題, $\mathcal{U}$ を楕円として与える問題は扱いやすい問題に帰着できることが知られている．

$\mathcal{U}$ を矩形 ($\mathcal{U} = [a_0 - \bar{a}, a_0 + \bar{a}]$) と定義するとロバスト最適化問題の制約式は $\max_{a \in \mathcal{U}} \ a^\top x = a_0^\top x + \bar{a}^\top |x| \leq b$ で表される．さらに新たな変数 y を導入するとこの問題は

$$\begin{aligned} & \text{min. } c^\top x \\ & \text{s.t. } a_0^\top x + \bar{a}^\top y \leq b \\ & \qquad -y \leq x \leq y \\ & \qquad y \geq 0 \end{aligned}$$

と書き換えられる. これは線形計画問題である．

次に $\mathcal{U}$ を楕円 ($\mathcal{U} = \{a_0 + Au : \|u\| \leq 1\}$) と定義するとロバスト最適化問題の制約式は

$$\begin{aligned} \max_{\|u\| \leq 1} \ (a_0 + Au)^\top x &= a_0^\top x + \max_{\|u\| \leq 1} \ (A^\top x)^\top u \\ &= a_0^\top x + \|A^\top x\| \leq b \end{aligned}$$

となるので, この問題は

$$\begin{aligned} & \text{min. } c^\top x \\ & \text{s.t. } a_0^\top x + \|A^\top x\| \leq b \end{aligned}$$

と書き換えられる. これは 2 次錐計画問題である [?].

4 ハブ空港配置モデル

ハブ空港配置問題とは, ハブ空港の配置と非ハブ空港からハブ空港への接続を決定する問題であり, O'Kelly [?, ?] によって初めて定式化された．ハブ空港配置モデルには主に 3 つの分類の方法がある．配置する空間による分類, ハブでないノードのハブへの割り当て規則による分類, 経由するハブの数による分類である．配置する空間による分類では, 離散型モデルと連続型モデルに分類できる．前者は与えられたハブ空港の候補点の中からハブ空港を選択するモデルであり, 後者は平面上の任意の点にハブ空港を配置可能としたモデルである．割り当て規則によって分類すれば, single allocation モデルと multiple allocation モデルに分類できる．前者は, ハブでない各ノードは唯一のハブに接続することを仮定したモデルで, 後者は複数のハブに接続することを許したモデルである．また, 経由するハブ

の数に分類すれば, 経由するハブを最大 2 とした 2-stop モデルと最大 1 とした 1-stop モデルに分類できる [?].

5 p-hub メディアン問題

離散型ハブ空港配置モデルの研究は O'Kelly [?] が初めて 2 次整数計画問題として定式化したことに始まる. O'Kelly の提案したこのモデルは 2-stop single allocation モデルである. Campbell [?] は目的関数を線形化し, 割り当て規則を multiple allocation とした p-hub メディアン問題を提案した. 本研究では Campbell のモデルについて取り扱う.

以下では, Campbell [?] の定式化について説明する. 始めに記号を定義する.

I : ノードの集合
α : ディスカウントファクター ($0 \le \alpha \le 1$)
p : 設置するハブ空港の数
h_{ij} : OD ペア $i \in I, j \in I$ 間の需要量
d_{ij} : ノード $i \in I, j \in I$ 間の距離
c_{ijkm} : OD ペア $i \in I, j \in I$ 間の移動にハブノード $k \in I, m \in I$ を利用した場合の輸送コスト
$c_{ijkm} = d_{ik} + \alpha d_{km} + d_{jm}$

$$x_{ijkm} = \begin{cases} 1 : \text{OD ペア } i \in I, j \in I \text{ 間の移動に} \\ \quad \text{ハブノード } k \in I, m \in I \text{ を利用する} \\ 0 : \text{上記以外} \end{cases}$$

$$y_k = \begin{cases} 1 : \text{ノード } k \in I \text{ をハブ空港とする} \\ 0 : \text{上記以外} \end{cases}$$

ここでディスカウントファクター α とは, ハブ空港間の輸送コストの割引率を示すパラメータである. ここではハブ空港間を移動する乗客の数に関係なく一定の値を取ると仮定する.

p-hub メディアン問題は以下のように定式化できる.

$$\min. \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{m\in I} h_{ij}c_{ijkm}x_{ijkm} \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k\in I}\sum_{m\in I} x_{ijkm} = 1, \qquad i \in I, j \in I \tag{2}$$

$$\sum_{k\in I} y_k = p, \tag{3}$$

$$x_{ijkm} \ge y_k, \qquad i \in I, j \in I, k \in I, m \in I \tag{4}$$

$$x_{ijkm} \ge y_m, \qquad i \in I, j \in I, k \in I, m \in I \tag{5}$$

$$x_{ijkm} \in \{0, 1\}, \qquad i \in I, j \in I, k \in I, m \in I \tag{6}$$

$$y_k \in \{0, 1\}, \qquad k \in I \tag{7}$$

目的 (1) は, すべての OD ペア $i \in I$, $j \in I$ の輸送コストの総和を最小化することを示している. 制約式 (2) は, すべての OD ペア $i \in I$, $j \in I$ は, いずれか 1 つのハブノードの組み合わせ $k \in I$, $m \in I$ を利用するということを示している. 制約式 (3) は, ハブノードとして選ばれるノードは, 全部で p 個であるということを示している. 制約式 (4) と制約式 (5) は, すべてのノードはハブノードに対してのみ接続が可能ということを示している. 制約式 (6) と制約式 (7) は, 変数のバイナリ制約である.

6 ロバスト p-hub メディアン問題

式 (1) における OD ペア i, j 間の需要量 h_{ij} に不確実性があると仮定し, 不確実性をもつ需要を $\tilde{H}$, 基準値を $\bar{H}$ とする.

6.1 不確実性集合 : 矩形

不確実性を持つ需要 $\tilde{H}$ は次の矩形型不確実性集合 $\mathcal{U}$ に含まれると仮定する.

$$\mathcal{U} = \{\tilde{H} \in \mathbb{R}^{N^2} \mid |\tilde{H}_{ij} - \bar{H}_{ij}| \le \delta_{ij}\bar{H}_{ij}\} \tag{8}$$

このとき $\tilde{H}_{ij}$ の取りうる値の範囲は $[(1-\delta_{ij})\bar{H}_{ij}, (1+\delta_{ij})\bar{H}_{ij}]$ となる. ここで目的関数をロバスト最適化を適用した形に書き換えると

$$\min. \max_{\tilde{H}\in\mathcal{U}} \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{m\in I} c_{ijkm}x_{ijkm}\tilde{H}_{ij}$$

となる. このとき $\max_{\tilde{H}\in\mathcal{U}} \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{m\in I} c_{ijkm}x_{ijkm}\tilde{H}_{ij}$ の最適解 $\tilde{H}^*_{ij}$ は

$$\tilde{H}^*_{ij} = (1+\delta_{ij})\bar{H}_{ij}$$

となるため, 目的関数は

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{m\in I} (1+\delta_{ij})\bar{H}_{ij}c_{ijkm}x_{ijkm}$$

となる. よって不確実性集合を矩形で与えた場合のロバスト p-hub メディアン問題は以下のように定式化できる.

$$\min. \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\sum_{k\in I}\sum_{m\in I} (1+\delta_{ij})\bar{H}_{ij}c_{ijkm}x_{ijkm} \tag{9}$$

s.t. (2)〜(7)

6.2 不確実性集合 : 楕円

不確実性を持つ需要 $\tilde{H}$ は次の楕円型不確実性集合 $\mathcal{U}$ に含まれると仮定する.

$$\mathcal{U} = \{\tilde{H} \in \mathbb{R}^{N^2} \mid \sum_{i\in I}\sum_{j\in I}\left[\frac{\tilde{H}_{ij} - \bar{H}_{ij}}{\delta_{ij}\bar{H}_{ij}}\right]^2 \le 1\} \tag{10}$$

ここで

$$S = \begin{pmatrix} (\delta_{11}\bar{H}_{11})^2 & & & \\ & (\delta_{12}\bar{H}_{12})^2 & & \text{\huge 0} \\ \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & (\delta_{NN}\bar{H}_{NN})^2 \end{pmatrix}$$

である対角行列を定義すると, 不確実性集合 $\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U} = \{\tilde{H} \in \mathbb{R}^{N^2} \mid (\tilde{H} - \bar{H})^\top S^{-1}(\tilde{H} - \bar{H}) \le 1\}$$

と書き換えられる．ここで $V_{ij} = \sum_{k \in I} \sum_{m \in I} c_{ijkm} x_{ijkm}$ とし，目的関数をロバスト最適化を適用した形に書き換えると

$$\min. \max_{\tilde{H} \in \mathcal{U}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} V_{ij} \tilde{H}_{ij}$$

となる．このとき，$\max_{\tilde{H} \in \mathcal{U}} \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} V_{ij} \tilde{H}_{ij}$ の最適解 $\tilde{H}^*$ は

$$\tilde{H}^* = \bar{H} + \frac{SV}{\sqrt{V^\top SV}}$$

となるため，目的関数は

$$\begin{aligned} & \min. V^\top \left(\bar{H} + \frac{SV}{\sqrt{V^\top SV}} \right) \\ & = \min. V^\top \bar{H} + \sqrt{V^\top SV} \\ & = \min. \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \bar{H}_{ij} V_{ij} + \sqrt{\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (\delta_{ij} \bar{H}_{ij})^2 V_{ij}^2} \end{aligned}$$

となる．ここで $W = \sqrt{\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (\delta_{ij} \bar{H}_{ij})^2 V_{ij}^2}$ とすると不確実性集合を楕円で与えた場合のロバスト p-hub メディアン問題は以下のように定式化できる．

$$\min. \sum_{i \in I} \sum_{j \in I} \bar{H}_{ij} V_{ij} + W \tag{11}$$

$$\text{s.t.} \quad V_{ij} \geq \sum_{k \in I} \sum_{m \in I} c_{ijkm} x_{ijkm}, \qquad i \in I, j \in I \tag{12}$$

$$W \geq \sqrt{\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} (\delta_{ij} \bar{H}_{ij})^2 V_{ij}^2} \tag{13}$$

(2)〜(7)

7 計算実験

ロバスト p-hub メディアン問題について，計算実験を行った．使用した最適化ソフトウェアは Gurobi 7.5.1 であり，計算環境は (プロセッサ：Intel(R) Core(TM) i7-6700K CPU @ 4.00GHz 4.00GHz 実装メモリ：32GB) である．実験にはハブ配置問題のベンチマークである CAB データの 25 空港と，2016 年アメリカ空港利用者数上位 25 空港 (以下 2016US25 データ) を用いる．CAB データの空港リストと位置を表??と図??に，2016US25 データの空港リストと位置を表??と図??に示す．また 2016US25 データにおける空港の番号は 2016 年の空港利用者数の多い順に付与した．

2016US25 データにおける 25 空港間の OD 需要については公開されていないため，重回帰分析を用いて CAB データの OD 需要と空港利用者数，距離の関係を分析した結果を用いて予測値を求めた．

$$\bar{H}_{ij} = 0.0386 M_i + 0.0386 M_j - 0.00118 r_{ij} \tag{14}$$

ただし M_i は空港 i の利用者数 (千万人)，r_{ij} は空港 i, j 間の距離 (千 km) であり，同じ都市にある空港間の需要量 $\bar{H}$ は 0 とする．

表 1 CAB データの 25 空港

1: Atlanta	2: Baltimore
3: Boston	4: Chicago
5: Cincinnati	6: Cleveland
7: Dallas-Fort Worth	8: Denver
9: Detroit	10: Houston
11: Kansas City	12: Los Angeles
13: Memphis	14: Miami
15: Minneapolis	16: New Orleans
17: New York	18: Philadelphia
19: Phoenix	20: Pittsburgh
21: St. Louis	22: SanFrancisco
23: Seattle	24: Tampa
25: Washington DC	

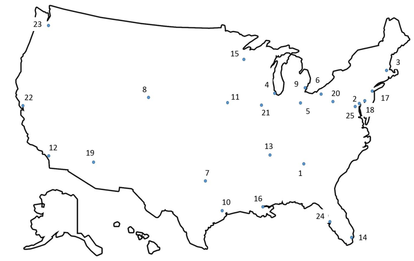

図 1 CAB データ各空港の位置

表 2 2016US25 データの 25 空港

1: ATL	2: LAX	3: ORD
4: DFW	5: JFK	6: DEN
7: SOF	8: LAS	9: SEA
10: CLT	11: PHX	12: MIA
13: MCO	14: IAH	15: EWR
16: MSP	17: BOS	18: DTW
19: LGA	20: PHL	21: FLL
22: BWI	23: DCA	24: MDW
25: SLC		

図 2 2016US25 データ各空港の位置

はじめに，すべての OD ペアに不確実性の大きさを示すパラメータ δ_{ij} の値を等しく与えて計算実験を行った．不確実性集合は楕円で与え，$p = 2, \alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ とした．δ_{ij} の値とその時のハブの最適配置の一部を表**??**, **??**,

??に示す．

表 3　$\alpha = 0.2, \delta$ の値とハブの配置 (CAB データ)

	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 100$
ハブ空港	12, 20	12, 20	12, 25	12, 18

表 4　$\alpha = 0.2, \delta$ の値とハブの配置 (2016US25 データ)

	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 100$
ハブ空港	8, 10	8, 10	8, 10	8, 10

表 5　$\alpha = 0.6, \delta$ の値とハブの配置 (2016US25 データ)

	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 100$
ハブ空港	6, 23	6, 10	6, 10	6, 10

CAB データでは α の値によらず, 不確実性が大きくなるにつれ最適なハブの配置が変化した．2016US25 データでは $\alpha = 0.6, 0.8$ で変化がみられたが $\alpha = 0.2, 0.4$ については変化がみられなかった．

次に 2016US25 データに対し, OD ペアごとに異なる不確実性の大きさを示す値 δ_{ij} を与えて $p = 2, \alpha = 0.2$ で計算実験を行う．不確実性の大きさ δ_{ij} の値を小, 中, 大の 3 つに区分して与える．以下に δ_{ij} の中の値と区分の設定方法を示す．2006 年の 2016US25 データ 25 空港の利用者数を M_i として式 (??) に代入することで, 2006 年の OD 需要を得る．2006 年 OD 需要を $\tilde{H}_{ij}$, 2016 年 OD 需要を $\bar{H}_{ij}$ とする．すべての OD ペアに関して δ_{ij} が等しいと仮定したうえで式 (8), (10) に $\tilde{H}_{ij}, \bar{H}_{ij}$ を代入する．式 (8) より $\delta \geq 0.285$ を得るため, 矩形型不確実性集合における δ_{ij} の中の値を 0.3 とする．式 (10) より $\delta \geq 2.051$ を得るため, 楕円型不確実性集合における δ_{ij} の中の値を 3 とする．次に OD 需要の相対差 ($\frac{\tilde{H}_{ij} - \bar{H}_{ij}}{\bar{H}_{ij}}$) を計算する．これより得られる相対差より δ_{ij} の区分を決定する．相対差の平均値は 0.0975(9.75%) となるため 0.1(10%) を基準とし, そこから ± 5%, つまり 5% 未満, 5% 以上 15% 未満, 15% 以上を δ_{ij} の値の区分とした．これらより定めた δ_{ij} の値を表??に示す．

表 6　相対差の区分と δ_{ij} の値

	5% 未満	5% 以上 15% 未満	15% 以上
$\mathcal{U}$: 矩形	$\delta_{ij} = 0$	$\delta_{ij} = 0.3$	$\delta_{ij} = 1$
$\mathcal{U}$: 楕円	$\delta_{ij} = 0$	$\delta_{ij} = 3$	$\delta_{ij} = 10$

また OD 需要の相対差が 5% 未満の OD ペアは 88 個, 5% 以上 15% 未満の OD ペアは 145 個, 15% 以上の OD ペアは 67 個である．これらを用いて計算実験を行った．矩形も楕円も結果は変わらずハブ空港は空港 8, 10 に配置された．

次に 2016US25 データにおける利用者数上位 3 つの空港を含む OD ペアに対してのみ不確実性を与え，どれだけの不確実性があれば解に変化がみられるか, $p = 2, \alpha = 0.2$ で実験した．結果 $\delta_{ij} = 24$ のとき解に変化がみられ, ハブ空港は空港 1, 8 に配置された．利用者数上位 3 つの空港それぞれに対し, $\delta_{ij} = 0$ と $\delta_{ij} = 24$ としたときの OD 需要の総和とその変化を求めた．表??に示す．

表 7　上位 3 空港それぞれの OD 需要の総和の変化

	$\delta_{ij} = 0$	$\delta_{ij} = 24$	増加率
空港 1	6.083	13.333	119.2%
空港 2	5.161	14.777	186.3%
空港 3	4.850	16.269	235.4%

8　結果の考察と今後の課題

δ_{ij} の値を現実的な範囲内で大きくしてもハブの最適配置に変化はあまり見られなかった．解に変化が出るまで δ_{ij} の値を大きくした場合, その不確実性の大きさは非現実的な値をとる．すなわち現状のハブの配置は頑健であるといえる．

本研究では p-hub メディアン問題にロバスト最適化を適用したモデルを, 不確実性集合を矩形としたモデル, 楕円としたモデルの 2 つ提案し, それらについて計算実験を行った．提案したモデルでは OD 需要が不確実性をもつとして定式化を行ったが, 今後はコストも不確実性をもつとして定式化を行い, 計算実験を行う．またこのモデルでは需要が減少するケースについて考慮できない．そのため減少に対応するために新たなモデルを考える．

参考文献

[1] O. Baron, J. Milner, H. Naseraldin : “Facility location : a robust optimization approach”, *Production and Operations Management Society*, Vol. 20, No. 5, pp. 772-785, 2011.

[2] J.F. Campbell : “Integer programming formulations of discrete hub location problems”. *European Journal of Operational Research*, 72, pp. 387-405, 1994.

[3] 福田エレン秀美, 福島雅夫 : 2 次錐計画と 2 乗スラック変数法, オペレーションズ・リサーチ, Vol. 59, No. 12, pp. 769-805, 2014.

[4] M.E. O’Kelly : “The location of interacting hub facilities”. *Transportation Science*, 26, pp. 282-296, 1986.

[5] M.E. O’Kelly : “A quadratic integer program for the location of interacting hub facilities”, *European Journal of Operational Research*, 32, pp. 393-404, 1987.

[6] 佐々木美裕, 福島雅夫 : シュタッケベルグ型ハブ配置モデル, アカデミア数理情報編, Vol. 1, pp. 99-111, 2001.

[7] 武田朗子 : 不確実性下での最適化-ロバスト最適化を中心に- , オペレーションズ・リサーチ, Vol. 51, No. 7, pp. 420-423, 2006.