

制限三体問題における不変多様体の計算を用いた 周期軌道間の最適遷移制御

M2016SC005 石田翔也

指導教員：坂本登

1 はじめに

制限三体問題の特異なダイナミクスとして周期軌道の不変多様体が注目を集めている。NASA のジェネシス計画では L_1 点のハロー軌道へ宇宙機を投入し太陽風のサンプル収集して地球に持ち帰った。この地球へ帰還させる際に、ハロー軌道の不安定性である不安定多様体を利用した。ハロー軌道の不安定多様体を利用することで、ごくわずかな摂動を与えることによって地球への帰還を可能にした。現在、観測ミッション要求の多様化・複雑化に伴い周期軌道間を遷移するような軌道計画が求められている [1, 2]。周期軌道間の遷移において、軌道それぞれの不安定多様体と安定多様体を計算し、それらを繋げることで少ないエネルギーで軌道間の遷移が可能である。

そこで本研究では、地球-月系円制限三体問題における L_1 ハロー軌道から L_2 ハロー軌道へ遷移する制御系設計を不変多様体計算に基づいて行う。一般的に不変多様体の計算は線形近似ダイナミクスを用いるが、制限三体問題は非線形ダイナミクスであるためそれでは、精度よく不変多様体を計算できていない [3]。そこで、非線形ダイナミクスを用いて不変多様体を計算することができる手法を用いる [4]。この手法は、積分漸化式を逐次的に数値計算を行うため計算コストが低い。

2 円制限三体問題

初めに円制限三体問題の運動方程式について考える。2つの主天体と宇宙機からなる系を Fig. 1 に示す。地球を質

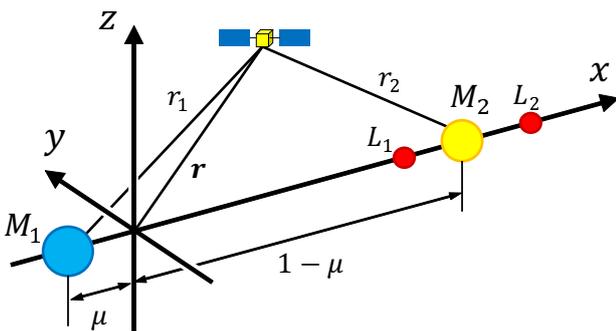


Fig. 1 円制限三体問題における回転座標系

量 M_1 の主天体 1 とし、月を質量 M_2 の主天体 2 とする。そして質量の合計が 1 に正規化されている。これらの質量は、質量比 $\mu = M_2/(M_1 + M_2)$ を用いることで、それぞれ $1-\mu$ と μ で表される。これらの天体は、共通の質量中心を中心に反時計回りに平面内を回転し、角速度は 1 に正規化されている。第 3 の天体として扱う宇宙機は、3次元空間を自由に運動することができ、その運動は原点に影響

しないと仮定されている。原点が質量の中心にあり、地球が $^s(x, y, z) = (-\mu, 0, 0)$ 、月が $^s(x, y, z) = (1-\mu, 0, 0)$ となるように回転座標系を定める。回転座標における宇宙機の位置を $\mathbf{r} = [x, y, z]^T$ とすることで、この運動方程式は次の 2 次形式で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} - 2\dot{y} \\ \ddot{y} + 2\dot{x} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = -\frac{\partial U_c}{\partial \mathbf{r}} \quad (1)$$

ここで U_c はポテンシャル関数であり

$$U_c(x, y, z) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2}$$

また、 r_1, r_2 は、

$$r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

$$r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2 + z^2}$$

である。このとき、ラグランジュ点の L_1 点は $(x, y, z) = (l_1, 0, 0)$ 、 L_2 点は $(x, y, z) = (l_2, 0, 0)$ にある。これに対し、状態量を $q_c = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]^T$ として式 (1) は以下のように表される。

$$\dot{q}_c = f(q_c) \quad (2)$$

このとき、右辺の関数 $f(q)$ は以下の式で表される。

$$f(q_c) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ 2\dot{y} - \frac{\partial U_c}{\partial x} \\ -2\dot{x} - \frac{\partial U_c}{\partial y} \\ -\frac{\partial U_c}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3)$$

3 制限三体問題における不変多様体

3.1 フロケ理論

周期系システムの線形解析では、周期系システムにおける状態量からの誤差を表す変分方程式を軌道上で線形化した線形時変システムを用いることで、誤差の発散・収束性から安定性を判別する。独立変数を t とした周期系システムを $q_c(t)$ 、 $q_c(t+T) = q_c(t)$ 、 T を周期とする。また、そこからの誤差を $q_e(t)$ とする。このとき、 $\dot{q}_c(t) = f(q_c)$ とすると、ずれた点の方程式は

$$\dot{q}_c(t) + \dot{q}_e(t) = f(q_c + q_e)$$

となることから、誤差系の方程式は以下のように表される。

$$\dot{q}_e(t) = f(q_c + q_e) - f(q_c)$$

この式に対して、テイラー展開を用いて整理すると以下のような周期系システムとして考えることができる。

$$\dot{q}_e(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=q_c(t)} q_e + \mathcal{O}(|q_e|^2) \quad (4)$$

ここで、係数行列を $A_c(t)$ 、非線形項を $N_c(t)$ とする。

$$A_c(t) = \left. \frac{\partial f}{\partial q} \right|_{q=q_c(t)}, \quad N_c(t) = \mathcal{O}(|q_e|^2)$$

この係数行列も q_c と同様に周期性を持つことから、以下の線形周期系システムを考える。

$$\dot{q}_e(t) = A_c(t)q_e \quad (5)$$

式 (5) において、初期位相 τ_0 における状態を $q_e(\tau_0)$ とすると、微分方程式の解は以下のように表すことができる。

$$q_e(t) = \Phi(t, \tau_0)q_e(\tau_0)$$

ここで、 $\Phi(t, \tau_0)$ は状態遷移行列を表しており、以下の微分方程式の解である。

$$\dot{\Phi}(t, \tau_0) = A_c(t)\Phi(t, \tau_0), \quad \Phi(\tau_0, \tau_0) = I_{6 \times 6} \quad (6)$$

この状態遷移行列はシステムの周期性より $\Phi(t+T, \tau_0 + T) = \Phi(t, \tau_0)$ の双周期性を有する。そして、式 (6) を一周期時間 T で積分することでモノドロミー行列 M が得られる。モノドロミー行列の固有値 λ (特性乗数) を調べることで、誤差 q_e の挙動がわかり周期軌道の安定性を解析することができる。

3.2 フロケ・リアプノフ変換

式 (4) に対して、フロケ・リアプノフ変換を行う。フロケ・リアプノフ変換は座標変換行列 $S(t)$ を用いて時変システムを時不変システムに変換する手法である。座標変換として以下の式を考える。

$$q_e(t) = S(t)\hat{q}_e(t), \quad S(t+T) = S(t)$$

この座標変換に対して座標変換後のシステムを

$$\dot{\hat{q}}_e(t) = \hat{A}\hat{q}_e + \hat{N}(t) \quad (7)$$

とする。座標返還前と座標変換後には以下の関係が成り立つ。

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= A(t)S(t) - S(t)\hat{A} \\ N(t) &= S(t)\hat{N}(t) \end{aligned}$$

この微分方程式に対して、初期角度 τ_0 における状態を $S(\tau_0) = I_{6 \times 6}$ として解くと、 \hat{A} を定数行列にするような座標変換行列 $S(t)$ は、微分方程式の解として以下のように表すことができる [5]。

$$S(t) = e^{\hat{A}(t-\tau_0)} S(\tau_0) \Phi(\tau_0, t) \quad (8)$$

ここで、システムの周期軌道の初期値からの一周期分を $t = \tau_0 + T$ とすることで

$$M = e^{\hat{A}T}$$

となる。この \hat{A} がフロケ要素と呼ばれるものであり、これをシステム行列とする。よって式 (7) に対して、ブロック対角化を施すことで、安定・不安定多様体法に適用可能となる。

4 制限三体問題における周期軌道

4.1 ハロー軌道

円制限三体問題において平衡点近傍には、その中心多様体として平面リアプノフ軌道が存在する。初めに、中心多様体法を用いることで小さなリアプノフ軌道を求め、この周期軌道に対して近傍の同種の軌道を繰り返し求めていくことでリアプノフ軌道を拡大していく。このとき、特性乗数の中心固有値の変化を観察していくと、あるところで実部が1虚部が0になる。これは異なる周期軌道の存在を示しており、この中心成分から励起される運動によって z 軸に振幅を持つハロー軌道を得ることができる [6]。そして、このハロー軌道を基に近傍の同種の軌道を求めていくことで Fig. 2 に示すようなハロー軌道群を得ることができる。このハロー軌道の計算において、そ

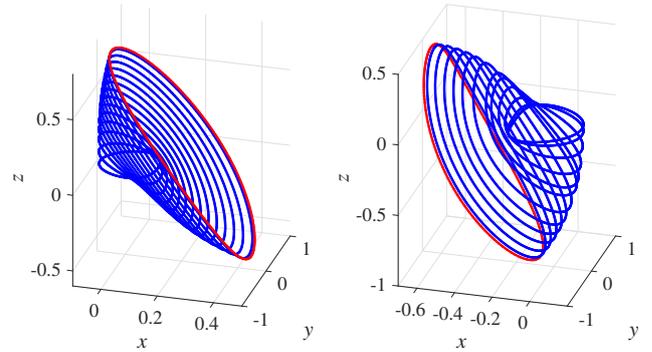


Fig. 2 L_1 ハロー軌道群と L_2 ハロー軌道群

それぞれのラグランジュ点と月との距離 ($1 - \mu - l_1$ および $l_2 - 1 + \mu$) を 1 とする正規化を行い、ラグランジュ点を原点としていることに注意されたい。Fig. 2 において、赤線で示されているハロー軌道に対して、遷移軌道の計算を行う。 L_1, L_2 点のハロー軌道の周期はそれぞれ $T_1 = 2.788, T_2 = 3.144$ であり、特性乗数 λ_1, λ_2 を以下に示す。

$$\lambda_1 \begin{cases} 431.622 \\ 0.115 \pm 0.993i \\ 0.999 \pm 1.468i \times 10^{-8} \\ 2.316 \times 10^{-3} \end{cases}, \quad \lambda_2 \begin{cases} 233.286 \\ 0.541 \pm 0.841i \\ -0.069 \pm 0.998i \\ 4.287 \times 10^{-3} \end{cases}$$

これらより、得られたハロー軌道がそれぞれ、一周期後に誤差が増幅する運動を示す不安定固有値 (絶対値 > 1) が 1 つ、一周期後に誤差が減衰する運動を示す安定固有値 (絶対値 < 1) が 1 つ、一周期後にもとに戻ってくるような運動を示す中心固有値 (絶対値 $= 1$) を 4 つ持つ不安定周期軌道であることがわかる。 L_1 ハロー軌道から L_2 ハロー軌道へ遷移する制御系設計を安定多様体と不安定多様体の計算を基にして行う。

4.2 フロケ要素の導出

得られた周期解 $q_c(t)$ とそこからの誤差 $q_e(t) = q - q_c$ について誤差システムを考える.

$$\dot{q}_e = A_c(t)q_e + N_c(t)$$

この時, 周期解の周期を T とすると, $A_c(t+T) = A_c$, $N_c(t+T) = N_c$ となる. このもとで, 座標変換後の状態を \hat{q}_e として線形部分を時不変とする座標変換を行う.

$$q_e(t) = S(t)\hat{q}_e(t)$$

これにより, 線形部分が時不変のシステムは次のように次のように表される.

$$\dot{\hat{q}}_e(t) = \hat{A}\hat{q}_e + \hat{N}_c, \quad \hat{A}: \text{Constant matrix}$$

ここで, $\hat{N}_c = S(t)^{-1}N_c(t)$ である. この時不変化されたシステム行列 \hat{A} をブロック対角化し, 安定多様体法と不安定多様体法を適用する.

5 ハロー軌道間の最適遷移軌道計画

5.1 安定多様体と不安定多様体

前節で得られたハロー軌道にフロケ・リアプノフ変換を適用した線形部時不変システムのシステム行列をブロック対角化したシステムに対して安定多様体法と不安定多様体法を用いることで, 周期軌道の安定多様体および不安定多様体の計算を行った. Fig. 3 にその結果を示す. こ

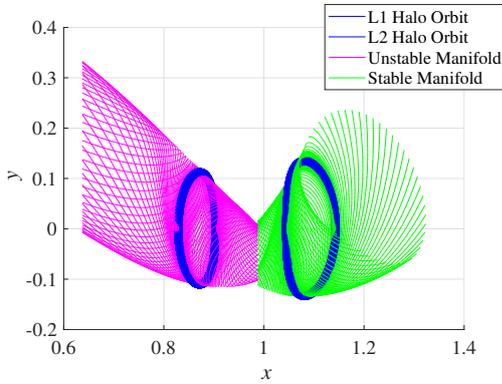


Fig. 3 L_1 ハロー軌道の不安定多様体と L_2 ハロー軌道の安定多様体 ($x - y$ 平面)

の中から, 不安定多様体の終端と安定多様体の始端の距離が近い 1 組を選ぶことによって, 遷移軌道計算における初期軌道とする.

5.2 最適制御問題設定

xyz 方向に任意の入力が加えられると仮定し, 入力を $u = [u_x, u_y, u_z]^T$ として状態方程式を以下のように与える.

$$\dot{q}_c = f(q_c) + Bu, \quad B = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (9)$$

入力に関して最適な制御則を得るために, このシステムに対して以下の評価関数を与える.

$$J = \int_0^{t_f} u^2 dt \quad (10)$$

ここで t_f は 2 点境界値問題を解く上での初期軌道の終端時刻を表す. 式 (9),(10) によって定義される最適制御問題に対応する Hamiltonian $H(t, q_c, u, p)$ は以下のように表される.

$$H(t, q_c, u, p) = p^T \{f(q_c) + Bu\} + u^T u$$

ここで p は随伴変数である. このとき, Hamiltonian を最小化する入力 u^* は

$$u^* = -\frac{1}{2}B^T p(t)$$

と与えられる. そして, Hamilton の正準方程式は次のように定義される.

$$\begin{cases} \dot{q}_c^* = \frac{\partial H}{\partial p}(t, q_c, u^*, p) \\ \dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial q_c}(t, q_c, u^*, p) \end{cases} \quad (11)$$

L_1 ハロー軌道の不安定多様体の終端が, L_2 ハロー軌道の安定多様体の始端と一致するように, 式 (11) の 2 点境界値問題をを解くことで遷移制御を行う. この式の解は最適入力印加時の最適軌道 $q_c^*(t)$ が得られ, またその軌道に沿って $u^*(t, p) = \frac{1}{2}B^T p$ の値を得ることで最適フィードフォワード入力が見られる.

5.3 2点境界値問題

Fig. 3 において, 安定多様体および不安定多様体は $x = 1 - \mu$ の距離まで計算されている. $x = 1 - \mu$ における安定多様体と不安定多様体は $y - z$ 平面上で Fig. 4 のようになっており, y が負と正の 2 つの位置で距離が近いことがわかる. そのため, 本研究では $x = 1 - \mu$ において

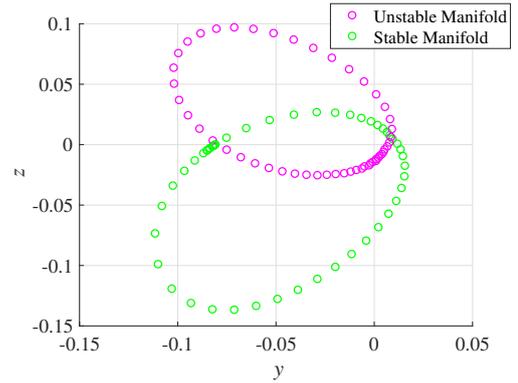


Fig. 4 $x = 1 - \mu$ における不安定多様体の終端と安定多様体の始端

y が負の位置を通る遷移軌道を考える. 以下の 3 つのステップでハロー軌道間の最適な遷移軌道を得る.

Step1 L_1 ハロー軌道の不安定多様体の終端と, L_2 ハロー軌道の安定多様体の始端の距離の近い一組を選択する. Fig. 3 より, 選択された不安定多様体および安定多様体を Fig. 5 に示す.

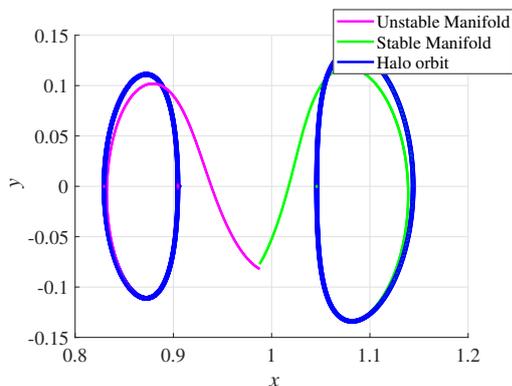


Fig. 5 選択された安定多様体と不安定多様体 ($x-y$ 平面)

Step2 Step1 で選択された不安定多様体を初期軌道とし、その終端を安定多様体の始端と一致するように最適制御における2点境界値問題を解くことで遷移軌道が得られる。この結果を Fig. 6 に示す。Step2 で得

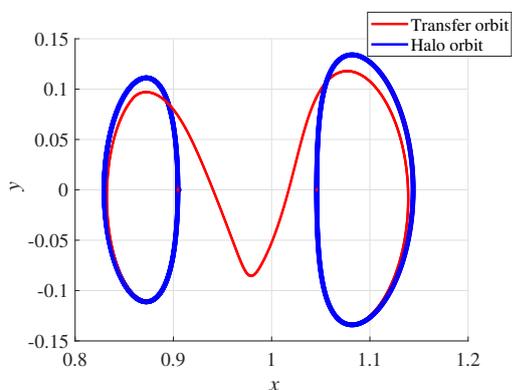


Fig. 6 不安定多様体の終端を安定多様体の始端に一致させた結果 ($x-y$ 平面)

られた遷移軌道に対して式 (10) の評価関数 J を計算した結果は次のようになる。

$$J = 0.553$$

Step3 Step2 で得られた遷移軌道に対して最適制御における2点境界値問題を解くことで最適な遷移軌道を得る。その結果を Fig. 7 に示す。Step3 で得られた遷移軌道の評価関数の値 J は Step2 と同様の計算で次のようになる。

$$J = 0.067$$

評価関数の値が小さくなっていることから、より最適な遷移軌道が得られたことがわかる。

6 おわりに

本研究では、地球-月系円制限三体問題においてラグランジュ点周りの周期軌道間の最適遷移軌道計画手法を提案した。2つの周期軌道 (L_1 , L_2 ハロー軌道) に対して非線形システムの不変多様体を直接計算する独自の計算

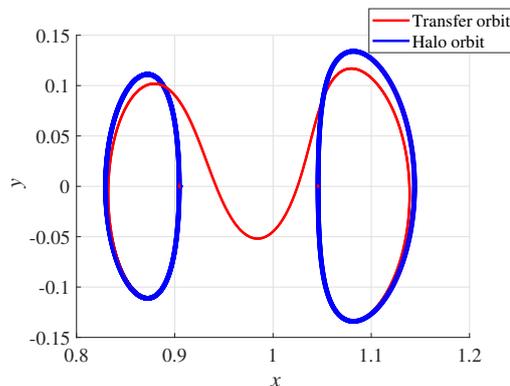


Fig. 7 最適遷移軌道 ($x-y$ 平面)

手法を用いることでそれぞれの安定多様体と不安定多様体を精度良く計算し、この不安定多様体を基にして最適制御における2点境界値問題を解くことによって、2つの周期軌道間の最適遷移軌道と、その軌道を実現する最適なフィードフォワード入力得到了。

参考文献

- [1] D. Cosgrove, S. Frey, J. Marchese, B. Owens, and M. Bester, "Artemis operations from earth-moon libration orbits to stable lunar orbits," in *SpaceOps 2012 Conference*, 2012.
- [2] R. Epenoy, "Optimal long-duration low-thrust transfers between libration point orbits," in *63rd International Astronautical Congress*, 2012.
- [3] G. Gómez, W. S. Koon, M. W. Lo, J. M. J. E. Marsden, and S. D. Ross, "Connecting orbits and invariant manifolds in the spatial restricted three-body problem," *Nonlinearity*, vol. 17, no. 5, pp. 1571–1606, 2004.
- [4] N. Sakamoto and A. J. van der Schaft, "Analytical approximation methods for the stabilizing solution of the hamilton-jacobi equation," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 10, pp. 2335–2350, 2008.
- [5] P. Montagnier, C. C. Paige, and R. J. Spiteri, "Real floquet factors of linear time-periodic systems," *Systems & Control Letters*, vol. 50, no. 4, pp. 251–262, 2003.
- [6] K. Nagata, N. Sakamoto, and Y. Habaguchi, "Center manifold method for the orbit design of the restricted three body problem," in *2015 54th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pp. 1769–1774, 2015.