逆命題を考えることによる証明問題の理解

M2014SS001　藤城　佳高
指導教員：佐々木　克巳

1　はじめに

本研究の目的は，証明問題の逆命題を考えること，すなわち，仮定の1つと結論を入れかえて考えることにより，その問題の理解を深めることである．とくに，逆命題が成立しない場合は，

成立するようにもとの命題の仮定を弱めること　$(*)$

までを考える．対象は中学校2年で扱われる図形の論証，とくに三角形の合同を用いた証明である．

逆命題を考えることのよさは，鈴木 [1] で述べられている．以下にそれを要約して示す．

(1.1) もとの問題の仮定と結論を明確に分けることができるようになる
(1.2) 逆命題を作ることは，もとの問題から新しい問題を作る活動であり，発展的な考え方の1つである
(1.3) 作った逆命題について，生徒が証明しようという意欲が高まる
(1.4) 逆命題を作ることで，生徒が「よりよいもの求めよう」とする数学的な態度を育てることができる
(1.5) 逆命題は成立しない場合があり，なぜ成立しないのかを生徒自身が考えるきっかけとなる

本研究の $(*)$ により，上の逆命題のよさはより一層高まると考える．

本研究では，具体的には，まず，個別の問題に対して行う逆命題考察の手順を定め，間宮 [2] から抽出した証明問題 (5題) に対して，その手順を適用した．そして，上の (1.2) における「新しい問題」，(1.4) における「よりよいもの」，(1.5) における「なぜ成立しないか」を具体例を通して考察し，逆命題を考察することの意義を具体的な形で述べた．

本稿では，次節で，個別の問題に対して行う手順を示す．3節では，その手順を適用した5題から，問題98と問題103を抽出しその考察の一部を示す．4節では，手順を適用した問題の考察をふまえた，逆命題のよさのうち $(*)$ に関わる部分を示す．

2　逆命題の考察の手順

本研究では，個別の問題に対する逆命題の考察を次の2つのstepで行う．

Step 1. その仮定，結論を明らかにし，それぞれにおいて，辺の長さ，角の大きさに関する条件を分離する．分離された辺の長さ，角の大きさに関する仮定を $A_1,\cdots,A_m$ とし，それ以外の仮定を $A^*_1,\cdots,A^*_{m^*}$ とおく (以下この m^* 個の仮定の列を Γ^* とおく)．同様に，辺の長さ，角の大きさに関する結論を $G_1,\cdots,G_n$ とし，それ以外の結論を $G^*_1,\cdots,G^*_{n^*}$ とおく．

Step 2. 各結論 G_j に対して次を行う．

Step 2-1. $A_1,\cdots,A_m$ のうち，G_j を導くのに必要な仮定 $A_{k_1},\cdots,A_{k_\ell}$ を抽出する．すなわち，次の2条件を満たす，$A_{k_1},\cdots,A_{k_\ell}$ を抽出する．
(1.6)$\Gamma^*,A_{k_1},\cdots,A_{k_\ell}\Longrightarrow G_j$ が成立する．
(1.7) どの $i\in\{k_1,\cdots,k_\ell\}$ に対しても，$\Gamma^*,\Sigma_i\Longrightarrow G_j$ は成立しない．
ただし，Σ_i は列 $A_{k_1},\cdots,A_{k_\ell}$ から A_i を除いた列である．

Step 2-2. 上の (1.6) の命題に対して，各仮定 $A_i(i\in\{k_1,\cdots,k_\ell\})$ と G_j を入れかえた逆命題 $\Gamma^*,\Sigma_i,G_j\Longrightarrow A_i$ が成立するかを調べる．

Step 2-3. step 2-2 の逆命題が成立するときは，その証明を与える．

Step 2-4. step 2-2 の逆命題が不成立のときは，その反例を与え，$\Gamma^*,\Sigma_i\Longrightarrow A_i\vee A'_i\leftrightarrow G_j$ が成立するように，仮定 A_i を $A_i\vee A'_i$ に弱める．ただし，A'_i は A_i と同じ辺（または角）についての文である．

1節で述べた $(*)$ は，上の step 2-4 に反映されている．ここで，step 2 を本質的な部分に絞るために，次の約束をしておく．

約束2.1 上の step 2 において，$\Gamma^*\Longrightarrow A_i\leftrightarrow G_j$ が成立するときは，以下の理由で，その考察を省略する．

理由:仮定より，

$$\Gamma^*,A_i\Longrightarrow G_j$$

を対象として逆命題を考えることになるが，その逆命題は

$$\Gamma^*,G_j\Longrightarrow A_i$$

の1つだけで，これも $\Gamma^*\Longrightarrow A_i\leftrightarrow G_j$ から，明らかに成立する．

3　個別の問題に対する逆命題の考察

この節では，[2] の問題98と問題103を，2節の手順にそって考察した結果を示す．ただし，本稿では，step 2-4（すなわち，1節の $(*)$）を重視して，それ以外の部分の多くを省略する．例えば，逆命題が成立することの証明などを省略する．

考察 3.1(問題 98 の考察)

問題98．△ABCの辺BCの中点をMとし，点Bを通り辺ACに平行な直線と直線AMとの交点をDとするとき，△BDM≡△CAMを示すことにより，BD=CAを示しなさい (図1参照)．

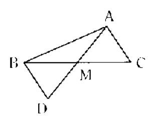

図1 問題98の図

Step 1．条件「平行」を分離する方法が複数あり，step 1の結果も複数ある．以下にそのうちの1つを示す．
仮定．

A_1^*:△ABCがある
A_2^*:Mは辺BC上にある
A_3^*:∠CADと∠BDAが錯角の位置にある
A_4^*:Dは直線AM上にある
A_1:BM=CM
A_2:∠CAD=∠BDA

結論．

G_1:CA=BD
G_2:CM=BM
G_3:AM=DM
G_4:∠CAM=∠BDM
G_5:∠CMA= ∠BMD
G_6:∠ACM= ∠DBM

A_2^*とA_1が「MがBCの中点である」を分離した結果であり，A_3^*とA_2が「AC//BD」を分離した結果である．

Step 2．jの値によって場合分けする．このstep 2において，Γ^*は，列A_1^*,A_2^*,A_3^*,A_4^*を表すとする．
j=1のとき，$\Gamma^*,A_1,A_2 \Longrightarrow G_2$を対象に仮定と結論を入れかえる．すなわち，各$A_i$と$G_1$を入れかえた逆命題

$$\Gamma^*, A_2, G_1 \Longrightarrow A_1 \qquad (3.1.1)$$
$$\Gamma^*, A_1, G_1 \Longrightarrow A_2 \qquad (3.1.2)$$

を考える．(3.1.1) は成立するが，(3.1.2）は成立しない．(3.1.2) では，

${A_2}'$:∠CAD+∠BDA=180°

とおくと

$$\Gamma^*, A_1 \Longrightarrow A_2 \vee A_2' \leftrightarrow G_1 \qquad (3.1.3)$$

が成立する．
(3.1.2) の反例:下図 (図 2) の場合が反例である．

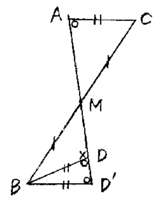

図 2 (3.1.2) の反例

(3.1.3) の証明:$\Gamma^*, A_1, A_2 \Longrightarrow G_1$は成立するので

$$\Gamma^*, A_1, A_2' \Longrightarrow G_1 \qquad (3.1.4)$$
$$\Gamma^*, A_1, G_1 \Longrightarrow A_2 \vee A_2' \qquad (3.1.5)$$

を示せば十分である．

(3.1.5) のみを示す．B，Cから直線AMにおろした垂線の足をそれぞれ，E，Fとする．A=FまたはD=Eのときは，∠CAD= ∠BDA=90°がいえるので，A_2とA_2'の両方が成り立つ．以後，A≠F,D≠E，すなわち，△CFAと△BEDが存在するとする．BCとADが垂直，すなわち，E=F=Mのときは，A_1より，CF=BEである．そうでないときは，△CFMと△BEMが存在し，

CM=BM(∵A_1)
∠CFM=∠BEM=90°(∵EとFの定義)
∠CMF=∠BME(∵対頂角)

だから，△CFM≡△BEMであり，CF=BEである．よって，△CFAと△BEDにおいて，

CF=BE
∠CFA=∠BED=90°(∵EとFの定義)
CA=BD(∵G_1)

より，△CFA≡△BEDである．

次に，以下の2条件を考える．
(条件 1)Aが，FとDの間にある．
(条件 2)Dが，AとEの間にある．

すると，

$$(\text{条件 } 1) \Longrightarrow \angle\mathrm{CAF} + \angle\mathrm{CAD} = 180^\circ \qquad (*1)$$
$$(\text{条件 } 1) \text{ の否定} \Longrightarrow \angle\mathrm{CAF} = \angle\mathrm{CAD} \qquad (*2)$$
$$(\text{条件 } 2) \Longrightarrow \angle\mathrm{BDA} + \angle\mathrm{BDE} = 180^\circ \qquad (*3)$$
$$(\text{条件 } 2) \text{ の否定} \Longrightarrow \angle\mathrm{BDA} = \angle\mathrm{BDE} \qquad (*4)$$

がいえる．(条件 1)，(条件 2) の成立，不成立によって，場合分けをする．
(i) (条件 1) と (条件 2) が成立するとき:

∠CAD=180°−∠CAF(∵(条件 1),(∗1))
=180°−∠BDE(∵△CFA≡△BED)
=∠BDA(∵(条件 2),(∗3))

すなわち，A_2がいえる．
(ii) (条件 1) が成立し，(条件 2) が成立しないとき:

∠CAD=180°−∠CAF(∵(条件 1),(∗1))
=180°−∠BDE(∵△CFA≡△BED)
=180°−∠BDA(∵(条件 2) の否定,(∗4))

すなわち，${A_2}'$がいえる．
(iii) (条件 1) が成立せず，(条件 2) が成立するとき:

∠BDA=180°−∠BDE(∵(条件 2),(∗3))
=180°−∠CAF(∵△CFA≡△BED)
=180°−∠CAD(∵(条件 1) の否定,(∗2))

すなわち，${A_2}'$がいえる．
(iv) (条件 1) が成立せず，(条件 2) が成立しないとき:

∠CAD=∠CAF(∵(条件 1) の否定,(∗2))
=∠BDE(∵△CFA≡△BED)
=BDA(∵(条件 2) の否定,(∗4))

すなわち，A_2がいえる．
(i)〜(iv) から，$A_2 \vee {A_2}'$を得る．

j=2,4のとき，$\Gamma^* \Longrightarrow A_1 \leftrightarrow G_2$，$\Gamma^* \Longrightarrow A_2 \leftrightarrow G_4$が成立するので，約束2.1で述べたとおり，これら場合の考察を省略する．

j=3のとき，$\Gamma^*,A_1,A_2 \Longrightarrow G_3$を対象に仮定と結論を入れかえる．すなわち，$A_i$と$G_3$を入れかえた

$$\Gamma^*, A_2, G_3 \Longrightarrow A_1$$
$$\Gamma^*, A_1, G_3 \Longrightarrow A_2$$

を考える．これらはどちらも成立する．

j=5 のとき，$\Gamma^*\Longrightarrow G_5$ が成立するので，考察の対象となる逆命題はない．
j=6 のとき，

$$\Gamma^*, A_2 \Longrightarrow G_6 \qquad (3.1.6)$$

が成立するので，これを対象に仮定と結論を入れかえる．すなわち，

$$\Gamma^*, G_6 \Longrightarrow A_2$$

を考える．これは成立する．

ここで，(3.1.6) が成立するとわかるまでに，step 2-2 と step 2-4 を経由できることを説明しておく．Γ^*,A_1,$A_2\Longrightarrow G_6$ の逆命題

$$\Gamma^*, A_2, G_6 \Longrightarrow A_1 \qquad (3.1.7)$$

は成立しない．下図 (図 3) の場合が反例である．

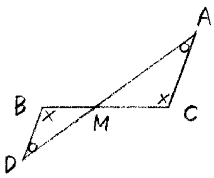

図 3 (3.1.7) の反例

この反例から Γ^*,$\neg A_1$,$A_2\Longrightarrow G_6$ がわかり，
Γ^*,$A_1 \vee \neg A_1$,$A_2\Longrightarrow G_6$ を得る．ここから，排中律によって (3.1.6) を得る．

考察 3.2(問題 103 の考察)

問題 103．図 4 のように，∠A=90° の直角二等辺三角形 ABC がある．∠B の二等分線上に AD//BC となる点 D をとり，BD と AC の交点を P とする．また，A から辺 BC に垂線 AR を引き，AR と BD の交点を Q とする．次の問いに答えなさい．
(1)△ABD が，AB=AD の二等辺三角形であることを証明しなさい．
(2)△ABQ≡△ADP であることを証明しなさい．

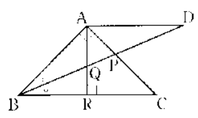

図 4 問題 103 の図

Step 1．条件「AD//BC」を分離する方法が複数あるが，ここでは，そのうちの 1 つを挙げて考察する．
仮定．

A_1^*:△ADC がある
A_2^*:D≠B
A_3^*:∠ADB と ∠CBD が錯角の位置にある
A_4^*:P は線分 BD 上にある
A_5^*:P は線分 AC 上にある
A_6^*:R は線分 BC 上にある
A_7^*:Q は線分 AR 上にある
A_8^*:Q は線分 BD 上にある

A_1:AB=AC
A_2:∠BAC=90°
A_3:∠ABD=∠CBD
A_4:∠ADB=∠CBD
A_5:∠ARC=90°

結論 (考察 3.1 と同様に 6 個の結論があるが，本稿ではそのうちの 1 つを示す)．

G_2:AQ=AP

Step 2．j=2 のときのみを示す．Γ^* は列
$A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*, A_5^*, A_6^*, A_7^*, A_8^*$ を表すとする．
j=2 のとき，

$$\Gamma^*, A_2, A_3, A_5 \Longrightarrow G_2 \qquad (3.2.1)$$

が成立するので，これを対象に仮定と結論を入れかえる．すなわち，

$$\Gamma^*, A_3, A_5, G_2 \Longrightarrow A_2 \qquad (3.2.2)$$

$$\Gamma^*, A_2, A_5, G_2 \Longrightarrow A_3 \qquad (3.2.3)$$

$$\Gamma^*, A_2, A_3, G_2 \Longrightarrow A_5 \qquad (3.2.4)$$

を考える．これらはすべて成立する．

ここで，(3.1.6) と同様に，(3.2.1) が成立するとわかるまでに，step 2-2 と step 2-4 を経由できることを説明しておく．$\Gamma^*, A_2, A_3, A_4, A_5 \Longrightarrow G_2$ の逆命題

$$\Gamma^*, A_2, A_3, A_5, G_2 \Longrightarrow A_4 \qquad (3.2.5)$$

は成立しない．下図 (図 5) の場合が反例である．

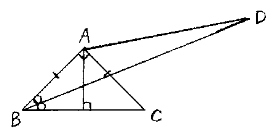

図 5 (3.2.5) の反例

この反例から Γ^*,A_2,A_3,$\neg A_4$,$A_5\Longrightarrow G_2$ がわかり，
Γ^*,A_2,A_3,$A_4 \vee \neg A_4$,$A_5\Longrightarrow G_2$ を得る．ここから，排中律によって (3.2.1) を得る．

4 Step 2-4 のよさ

この節では，step 2-4（すなわち，1 節の ($*$)）のよさを示す．2 節の手順をいくつかの問題に適用した結果から，step 2-4 には次の 2 つのよさがあるとわかる．
(4.1) 2 つの三角形において，条件

> 対応する，2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しい (SSK)

の意味を深く理解できる
(4.2) 不要な仮定を見つけることができる

まず，(4.1) を，考察 3.1 の (3.1.2) の反例と (3.1.5) の証明を用いて確認しよう．

(3.1.2) の反例からは，(SSK) から 2 つの三角形は必ずしも合同とはいえないことを示す具体例を導いており，(SSK) の理解を深められる．

(3.1.5) の証明からは，(SSK) が成り立つときの 2 つの三角形の関係が，いくつかのパターンに分類されることがわかり，他の合同条件の関係を理解できる．このことを一般の形でまとめておこう．2 つの三角形 △ABC と △EFG において，(SSK) が成立する，すなわち，

$A_1 : \mathrm{AB} = \mathrm{EF},$

$A_2 : \mathrm{BC} = \mathrm{FG},$

$A_3 : \angle\mathrm{C} = \angle\mathrm{G}$

が成立する場合を考える．このとき，B から直線 AC におろした垂線の足を D，F から直線 EG におろした垂線の足を H とおくと，

$\mathrm{D} \neq \mathrm{C} \Longrightarrow \triangle\ \mathrm{BCD} \equiv \triangle\ \mathrm{FGH},$

$\mathrm{BD} = \mathrm{FH},$

$\mathrm{D} \neq \mathrm{A} \Longrightarrow \triangle\ \mathrm{ABD} \equiv \triangle\ \mathrm{EFH}$

が成立する．よって，△ABC は，上で合同とわかった 2 組の三角形の位置関係と A=D か否かによって，図 6, 図 7, 図 8 の 3 つのパターンに分類して考えてよい．ただし，∠C が直角または鋭角のときは，図 6 のパターンのみである．△EFG についても同様である．

図 6, 図 7, 図 8 から，△ABC と △EFG が同じパターンのときは，2 つの三角形は合同であるとわかる．このうちのパターン 3 同士のときは，(SSK) が直角三角形の合同条件になっている．また，パターン 1 同士，パターン 2 同士のときは，フィンランドの数学で教育している合同条件になっている．具体的には，次の条件 (SSK)* である．

> 対応する, 2 組の辺とその間にない 1 組の角が
> それぞれ等しく，その間にない残り 1 組の角が
> 鋭角同士または鈍角同士である．
>
> (SSK)*

なお，パターン 1 同士で，∠C が (したがって，A_3 より ∠G も) 直角または鈍角のときは，残りの角が鋭角なので (SSK)* を満たしている．とくに，直角のときは直角三角形の合同条件も満たしている．

以上，(SSK) からわかる性質から，(SSK) のより深い意味を合同条件と関連させて理解できた．

さらに，この合同条件との関連を理解することで，次のよさにつなげることができる．

(4.1.1) (SSK) が成立するときの，他の角の性質を理解できる．
(4.1.2) (SSK)* を用いる問題を具体的に作成できる．
(4.1.3) 「(SSK) から 2 つの三角形の合同が導びかれる」への反例を挙げるしくみを理解できる．
(4.1.4) 場合分けの考え方の訓練になる．

以下詳細を述べる．

(4.1.1) : 具体的には，(3.1.3) の $A_2 \vee A_2{}'$ に対応する条件

$\angle\mathrm{BAC} = \angle\mathrm{FEG}$ または $\angle\mathrm{BAC} + \angle\mathrm{FEG} = 180°$

を理解できる．

(4.1.2) : (SSK)* を本質的に使った問題は，フィンランドの教科書 [3] にはあまり見られなかったことから，その問題の材料を得ることは有益と考える．

(4.1.3) : 反例は，パターン 1 とパターン 2 の組み合せを考えれば挙げられる．

(4.1.4) : (3.1.5) に見られるように，この種の問題では，パターン 1 からパターン 3 までの場合分けと ∠C が直角か否かの場合分けが必要である．すなわち，(3.1.5) の種類の問題では，場合分けの考え方を育成できると考える．

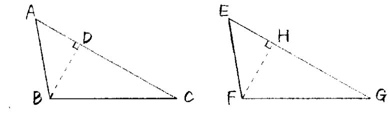

図 6 パターン 1

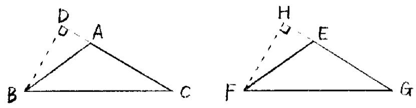

図 7 パターン 2

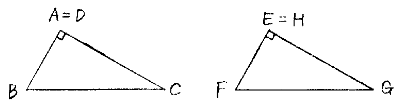

図 8 パターン 3

次に，(4.2) を確認しよう．(4.2) は，step 2-1 の「G_j を導くのに必要な仮定を抽出する」操作に現れるが，この操作において，不要な仮定を見つけるのに，step 2-4 が有効なことがある．すなわち，step 2-4 における A_i' が $\neg A_i$ とわかると，「G_j を導くのに A_i は不要」とわかる．

具体的には，考察 2.1($j = 6$)，考察 2.2(j=2) の 2 つの場合は，不要な仮定を除去した結果をもとに逆命題を作っており，そこで，step 2-4 を経た過程も示している．考察 3.1($j = 6$ の場合) のように，step 2-4 を経ることなく不要な仮定を見つけられそうなものもあるが，考察 3.2($j = 2$ の場合) のように，A_4 が不要であることに気づきにくいものもある．とくに，後者の場合は step 2-4 が有効と考える．

参考文献

[1] 鈴木誠 :『中学校数学科における「逆」の問題づくりに関する研究』．日本数学教育学会誌，第 76 巻，第 7 号，pp. 3–10.

[2] 間宮勝己，山腰政喜 :『最高水準特進問題集　数学中学 2 年』．文英堂，東京，2012.

[3] Markku Halmetoja，他 6 名 :『MATEMATIIKAN TAITO 3』．WSOY，Helsinki，2006.