非線形重みを用いた3自由度ヘリコプタの非線形 H^∞ 制御

M2014SC001 服部賢仁

指導教員：大石泰章

1 はじめに

ヘリコプタは不安定系であり, 非線形特性が強いため制御するのは容易ではない. そのため, ヘリコプタの自動操縦のための制御系設計問題は実用性が高く, また制御理論の観点から見ても興味深いものがある.

本研究では, Quanser 社の 3 自由度ヘリコプターを制御対象とし, 機体姿勢と位置の制御を目的とした制御器設計を試みる. よく行われるようにシステムを平衡点周りで線形化して設計を行うと, 非線形特性を無視することになるため, 今回のような非線形特性の強い制御対象には不向きである. そこで本研究では, 非線形 H^∞ 制御理論を用いることで, 非線形性を考慮した制御則設計を行う. 非線形 H^∞ 制御理論は線形 H^∞ 制御理論の自然な拡張であり, いくつかの解法が提案されている. その中でも本研究では, 非線形重みを導入することで線形行列不等式に帰着する文献 [1,2] の設計法を用いる.

本論文の構成は次の通りである. まず, 2 章では, 制御対象の運動方程式を求め, 状態空間表現を導出する. その際に, ホバリング入力を導入し, 偏差系の設計を行う. 3 章では, 非線形 H^∞ 制御理論を用いた制御則設計を行う. 章の前半に文献 [1,2] で提案されている非線形 H^∞ 制御則についての概要を述べる. その際, 非線形重みの役割についても述べる. 後半に本研究で扱う実システムに対して行った設計について述べる. 4 章では, 3 章で設計した制御則を用いてシミュレーションと実機実験を行い, 線形の制御則との比較・考察を行う. 最終章では, まとめと今後の課題について述べる.

2 制御対象

2.1 基本構造

制御対象である Quanser 社 3 自由度ヘリコプタ [3] の概略図を図 1, 本研究で使用する各種パラメータを表 1 に示す.

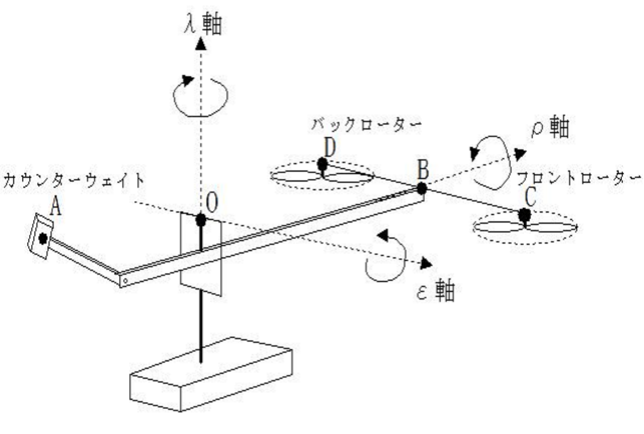

図 1 Quanser 社 3 自由度ヘリコプタの概略図

表 1 パラメータ

記号	詳細	値	単位
K_f	ロータの揚力定数	0.1188	[N/V]
M_f	フロントロータの質量	0.77	[kg]
M_b	バックロータの質量	0.77	[kg]
M_h	ヘリコプタボディの質量	1.55	[kg]
M_w	カウンタウェイトの質量	1.87	[kg]
L_b	C, Dから各ロータ間の長さ	0.02	[m]
L_a	BO間の長さ	0.665	[m]
L_w	AO間の長さ	0.464	[m]
L_h	BC，BD間の長さ	0.178	[m]
ϵ_h	ヘリコプタボディから点Oへの仰角	0.128	[rad]
ϵ_w	カウンタウェイトから点Oへの仰角	0.053	[rad]
g	重力加速度	9.81	[m/s^2]

支柱 AB は支点 O を中心として水平面内と垂直面内で自由に回転でき, 基準点からの水平方向への回転角度を λ[deg], 水平面を基準とした垂直方向の回転角度を ϵ[rad] とする. 機体 CD は支柱 AB を軸に自由に回転し, 水平面からの回転角度を ρ[rad] とする. 機体の前後に取り付けられたモータに電圧 $V_f[V], V_b[V]$ を加えることで揚力を得ることができ, 機体の制御が可能になる.

2.2 モデリング

Lagrange の運動方程式より, 運動方程式を導出する. 本研究で使用する実験機はフロントロータとバックロータが同じ方向に回転するため, 反動トルク $A_\mathrm{t}(t)$ の影響が無視できない. 反動トルクは

$$A_\mathrm{t}(t) = L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}a_\mathrm{t}(V_\mathrm{f}(t) + V_\mathrm{b}(t))$$

のようにモデル化でき, 実験によれば $a_\mathrm{t} \cong -0.08$ である. 反動トルクを考慮した運動方程式を導出すると以下のようになる:

$$\begin{aligned}\ddot{\epsilon}(t) =& \frac{L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}}{J_\epsilon}(V_\mathrm{f}(t) + V_\mathrm{b}(t))(\cos\rho(t) + a_\mathrm{t}\sin\rho(t)) \\ &+ L_\epsilon(t) + \frac{1}{J_\epsilon}w(t),\end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\rho}(t) =& \frac{K_\mathrm{f}}{J_{\rho(\mathrm{t})}}V_\mathrm{f}(t)(L_\mathrm{b}\sin\rho(t) + L_\mathrm{h}\cos\rho(t))\cos\rho(t) \\ &+ \frac{K_\mathrm{f}}{J_{\rho(\mathrm{t})}}V_\mathrm{b}(t)(L_\mathrm{b}\sin\rho(t) - L_\mathrm{h}\cos\rho(t))\cos\rho(t),\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\ddot{\lambda}(t) =& -\frac{L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}}{J_\lambda(t)}(V_\mathrm{f}(t) + V_\mathrm{b}(t))(\sin\rho(t) + a_\mathrm{t}\cos\rho(t)) \\ &+ L_\lambda(t) + \frac{1}{J_\lambda}w(t).\end{aligned} \tag{3}$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
J_\epsilon &= M_\mathrm{h}L_\mathrm{a}^2 + M_\mathrm{w}L_\mathrm{w}^2,\\
J_\rho &= M_\mathrm{h}L_\mathrm{h}^2,\\
J_\lambda(t) &= M_\mathrm{h}L_\mathrm{a}^2\cos^2(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{h})\\
&\quad +M_\mathrm{w}L_\mathrm{w}^2\cos^2(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{w}),\\
L_\epsilon(t) &= -\frac{M_\mathrm{h}L_\mathrm{a}^2}{J_\epsilon}\sin(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{h})\cos(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{h})\dot{\lambda}^2(t)\\
&\quad -\frac{M_\mathrm{w}L_\mathrm{w}^2}{J_\epsilon}\sin(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{w})\cos(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{w})\dot{\lambda}^2(t)\\
&\quad -\frac{M_\mathrm{h}gL_\mathrm{a}}{J_\epsilon}\sin(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{h})+\frac{M_\mathrm{w}gL_\mathrm{w}}{J_\epsilon}\sin(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{w}),\\
L_\lambda(t) &= -\frac{2M_\mathrm{h}L_\mathrm{a}^2}{J_\lambda(t)}\sin(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{h})\cos(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{h})\dot{\epsilon}(t)\dot{\lambda}(t)\\
&\quad -\frac{2M_\mathrm{w}L_\mathrm{w}^2}{J_\lambda(t)}\sin(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{w})\cos(\epsilon(t)-\epsilon_\mathrm{w})\dot{\epsilon}(t)\dot{\lambda}(t)
\end{aligned}
$$

である. $L_\epsilon(t)$ の式の第 1 項, 第 2 項は支点 O から外方向にかかる遠心力であり, 第 3 項, 第 4 項はヘリコプタ総質量, カウンタウェイトにかかる重力による影響である. $L_\lambda(t)$ の式の第 1 項, 第 2 項はコリオリ力の影響である.

2.3 状態空間表現の導出

求まった制御対象の運動方程式から, 状態空間表現による数学モデルの導出を行う. 導出の際に, 平衡点からの偏差系を考え, $\epsilon=\lambda=0$ を平衡点にするような姿勢角 ρ_a とホバリング入力 $V_\mathrm{fh}, V_\mathrm{bh}$ を以下のように定める:

$$
\begin{aligned}
\rho_\mathrm{a} &= \tan^{-1}(-a_\mathrm{t}),\\
V_\mathrm{h} &= \frac{M_\mathrm{h}gL_\mathrm{a}\sin(-\epsilon_\mathrm{h})-M_\mathrm{w}gL_\mathrm{w}\sin(-\epsilon_\mathrm{w})}{K_\mathrm{f}L_\mathrm{a}(\cos\rho_\mathrm{a}+a_\mathrm{t}\sin\rho_\mathrm{a})},\\
V_\mathrm{fh} &= V_\mathrm{h}\frac{-L_\mathrm{b}\sin\rho_\mathrm{a}+L_\mathrm{h}\cos\rho_\mathrm{a}}{2L_\mathrm{h}\cos\rho_\mathrm{a}},\\
V_\mathrm{bh} &= V_\mathrm{h}\frac{L_\mathrm{b}\sin\rho_\mathrm{a}+L_\mathrm{h}\cos\rho_\mathrm{a}}{2L_\mathrm{h}\cos\rho_\mathrm{a}}.
\end{aligned}
$$

定めた平衡点から偏差を考え, $\rho(t)=\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t), V_\mathrm{f}(t)=V_\mathrm{fh}+\Delta V_\mathrm{f}(t), V_\mathrm{b}(t)=V_\mathrm{bh}+\Delta V_\mathrm{b}(t)$ とする. また, 系がゆっくりと動くと仮定し, $\dot{\epsilon}(t)\dot{\lambda}(t)\cong 0, \dot{\lambda}^2(t)\cong 0$, ϵ は常に零近傍であると仮定し $J_\lambda(t)\cong\tilde{J}_\lambda = M_\mathrm{h}L_\mathrm{a}^2\cos^2(-\epsilon_\mathrm{h})+M_\mathrm{w}L_\mathrm{w}^2\cos^2(-\epsilon_\mathrm{w})$ とする. 以上を施し, 状態変数を $x(t)=[\epsilon\ \Delta\rho\ \ \lambda\ \ \dot{\epsilon}\ \ \dot{\Delta\rho}\ \ \dot{\lambda}\ \ \int(\epsilon_\mathrm{ref}-\epsilon)dt\ \ \int(\lambda_\mathrm{ref}-\lambda)dt]^\mathrm{T}$, 入力を $u(t)=[\Delta V_\mathrm{f}\ \ \Delta V_\mathrm{b}]^\mathrm{T}$ としたときの数学モデルが以下のように得られる:

$$
\left\{\ \dot{x}(t)=Ax(t)+B_1w(t)+B(t)u(t)+N(t)\right. \quad , \tag{4}
$$

(5)

$$
A=\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\\0&a_\epsilon&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&a_\lambda&0&0&0&0\\-1&0&0&0&0&0\\0&0&-1&0&0&0\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\\frac{1}{J_\epsilon}\\0\\\frac{1}{J_\lambda}\\0\\0\end{bmatrix},
$$

$$
B(t)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\\b_\epsilon(t)&b_\epsilon(t)\\b_{\rho\mathrm{f}}(t)&b_{\rho\mathrm{b}}(t)\\b_\lambda(t)&b_\lambda(t)\\0&0\\0&0\end{bmatrix}, N(t)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\n_\rho(t)\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
a_\epsilon &= \frac{L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}}{J_\epsilon}V_\mathrm{h}(-\sin\rho_\mathrm{a}+a_\mathrm{t}\cos\rho_\mathrm{a}),\\
a_\lambda &= -\frac{L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}}{J_\lambda}V_\mathrm{h}(\cos\rho_\mathrm{a}-a_\mathrm{t}\sin\rho_\mathrm{a}),\\
b_\epsilon(t) &= \frac{L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}}{J_\epsilon}(\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))+a_\mathrm{t}\sin(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))),\\
b_{\rho\mathrm{f}}(t) &= \frac{K_\mathrm{f}}{J_\rho}L_\mathrm{b}\sin(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))\\
&\quad +\frac{K_\mathrm{f}}{J_\rho}L_\mathrm{h}\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t)),\\
b_{\rho\mathrm{b}}(t) &= \frac{K_\mathrm{f}}{J_\rho}L_\mathrm{b}\sin(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))\\
&\quad -\frac{K_\mathrm{f}}{J_\rho}L_\mathrm{h}\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t)),\\
b_\lambda(t) &= -\frac{L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}}{J_\lambda(t)}(\sin(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))+a_\mathrm{t}\cos(\rho_\mathrm{a}+\Delta\rho(t))),\\
n_\rho(t) &= \frac{L_\mathrm{a}K_\mathrm{f}}{J_\epsilon}V_\mathrm{h}(\cos\rho_\mathrm{a}+a_\mathrm{t}\sin\rho_\mathrm{a})\cos\Delta\rho(t)-L_\epsilon(t).
\end{aligned}
$$

3 非線形 H^∞ 制御則の設計

非線形 H^∞ 制御問題とは「与えられた正定数 γ に対して, 閉ループシステムを内部 (指数) 安定にし, かつ外乱入力 w から評価出力 z までの L_2 ゲインが γ 以下となる制御器 u を設計せよ」という問題である. そのため, 常に

$$
\frac{\|z\|_2}{\|w\|_2}\le\gamma \tag{6}
$$

とするような制御則でなければならない. 今回のように, 非線形の制御対象に対して非線形 H^∞ 制御論を適用する場合, ハミルトンヤコビ偏微分不等式を解く必要が生じるが, 解析的にハミルトンヤコビ偏微分不等式を解くことは容易ではない. そこで, 文献 [1, 2] で提案されている非線形重みを導入する設計法を用いることで, ハミルトンヤコビ偏微分不等式を解かずに済ます非線形 H^∞ 制御則の設計を行う.

3.1 非線形重みを用いた非線形 H^∞ 制御則

評価出力に図 2 のブロック線図のように非線形重み $l(x), a(x)$ を導入した一般化制御対象を考える. このときの一般化制御対象は次式で表される. ただし, $W_1(s)$ は評価出力にかかる周波数重み, $W_2(s)$ は入力にかかる周波数重みだが, 本研究では $W_1(s)=W_2(s)=1$ とした:

$$
\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}(t)&=&Ax(t)+B_1w(t)+B(x)u(t)\\ z&=&l(x)C_1x(t)+a(x)D_{12}u(t)\end{array}\right. . \tag{7}
$$

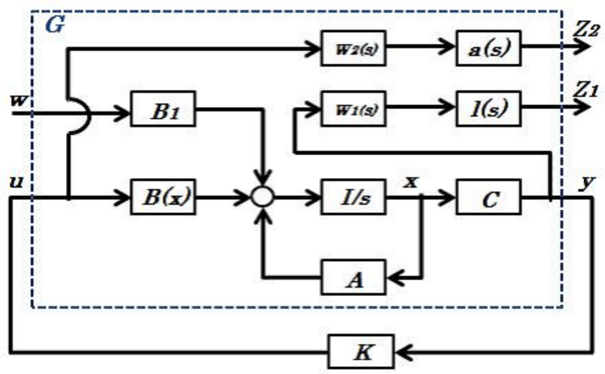

図 2 非線形重みを用いた一般化制御対象

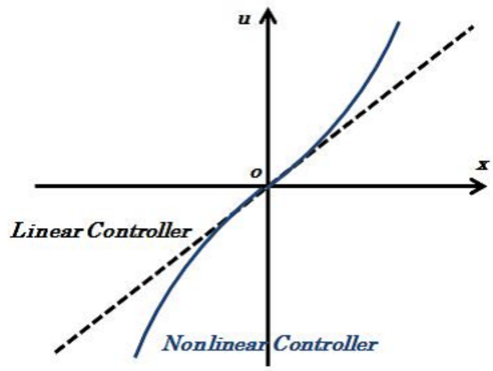

図 3 状態 x と入力 u との関係

ここで, 非線形重み $l(x), a(x)$ を

$$\begin{cases} l(x) = & \sqrt{1+m_0(x)x^{\mathrm{T}}PB(x)B^{\mathrm{T}}(x)Px} \\ a(x) = & \frac{1}{\sqrt{1+m_0(x)x^{\mathrm{T}}C_1^{\mathrm{T}}C_1x}} \end{cases} \tag{8}$$

と定義する．ただし, $m_0(x)$ は任意の正定スカラー値関数である． 定義された非線形重みを用いた一般化制御対象に対して,

$$PA + A^{\mathrm{T}}P + \frac{1}{\gamma^2}PB_1B_1^{\mathrm{T}}P + C_1^{\mathrm{T}}C_1 < 0 \tag{9}$$

を満たす行列 P が存在すれば, 非線形 H^∞ 制御問題が達成される制御入力 $u(t)$ が以下のように求まる:

$$u(t) = -\frac{1}{a^2(x)}B^{\mathrm{T}}(x)Px(t). \tag{10}$$

3.2 非線形重みの役割

非線形重み $l(x), a(x)$ を式 (7), 式 (8) にした理由が 2 つある．1 つ目は, 非線形 H^∞ 制御則を設計する上で満たさなければならない条件

$$\begin{aligned}&\left(1-l^2(x)\right)x^{\mathrm{T}}(t)C_1^{\mathrm{T}}C_1x(t) \\ &\qquad + \frac{1}{a^2(x)}x^{\mathrm{T}}(t)PB(x)B^{\mathrm{T}}(x)Px(t) \geq 0\end{aligned} \tag{11}$$

が存在する．この条件を自動的に成り立たせるような非線形重み $l(x), a(x)$ を設計する必要がある．

2 つ目は, 制御対象を考慮する．数式モデルを見ると, λ に対しての入力項 $(B(x))$ が原点近傍外で大きくなるため,

$$\begin{cases} \text{・原点近傍外で状態の大きさを抑制する} \\ \text{・入力は可能な限り制限する} \end{cases}$$

とするような非線形重み $l(x), a(x)$ にしたい．そこで, 原点近傍では $a(x) \approx 1$, 原点近傍外では $a(x) \ll 1$ となるような重みの設計を行う．そうすれば, 図 3 のように原点近傍外では線形制御器に比べて状態 x の大きさをより抑えた制御が可能となる．

以上の理由から非線形重み $l(x), a(x)$ を式 (7), 式 (8) に定義する．

3.3 制御則設計

条件式 (8) が成り立つのは行列 A が内部安定のときである．しかし, 本研究で使用する実システムは行列 A が不安定であるため, そのまま実装することができない．そこで, システムを内部安定にする制御器 K_{L} を事前に設計し, システムを以下のように変換する:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B(x)u_{\mathrm{L}}(t) + B(x)u_{\mathrm{N}}(t) \\ &= (A + B(x)K_{\mathrm{L}})x(t) + B_1w(t) + B(x)u_{\mathrm{N}}(t) \\ &= \widetilde{A}(x)x(t) + B_1w(t) + B(x)u_{\mathrm{N}}(t).\end{aligned} \tag{12}$$

このシステムに対して非線形重みを用いた非線形 H^∞ 制御則を実装する．ただし, 制御器 K_{L} と行列 P を設計する際, 行列 $\widetilde{A}(x), B(x)$ は状態 x を含むため, 状態 x の変動範囲を考慮した設計法をとる．

本研究では, LMI*を用いて, 変動領域に対して行列多面体表現によるロバスト安定化制御器の設計法を行う．行列 $\widetilde{A}(t), B(x)$ に含まれる状態 x は $\rho(t)$ であるため, ρ はヘリコプタの仕様に基づく $-30[\mathrm{deg}] \leq \rho \leq 30[\mathrm{deg}]$ の範囲で保障する．具体的には, 制御器 K_{L} を設計する際は, 行列 $B(x)$ の変動領域を

$$\begin{cases} b_{\epsilon\mathrm{min}} \leq b_\epsilon(t) \leq b_{\epsilon\mathrm{max}} \\ b_{\rho\mathrm{fmin}} \leq b_{\rho\mathrm{f}}(t) \leq b_{\rho\mathrm{fmax}} \\ b_{\rho\mathrm{bmin}} \leq b_{\rho\mathrm{b}}(t) \leq b_{\rho\mathrm{bmax}} \\ b_{\lambda\mathrm{min}} \leq b_\lambda(t) \leq b_{\lambda\mathrm{max}} \end{cases}$$

と表し, この端点領域に対してロバスト保障を行う．行列 P を設計する際は, 行列 $\widetilde{A}(t)$ が $A + B(x)K_{\mathrm{L}}$ であるため, 制御器 K_{L} と同様の変動領域の保障を行う．以上を行えば, 単一の制御器 K_{L} と正定対象行列 P が導出される．導出された制御器 K_{L} と行列 P を用いて入力 $u(t)$ を

$$u(t) = (K_{\mathrm{L}} - \frac{1}{a^2(x)}B^{\mathrm{T}}(x)P)x(t) \tag{13}$$

と定めることで, 不安定なシステムに対する非線形重みを用いた非線形 H^∞ 制御則を設計する．この設計した制御則をシミュレーションと実機実験から有用性を確認する．

*Linear Matrix Inequality: 線形行列不等式の略称

4 シミュレーションと実機実験

3 章で求まった制御則に対してシミュレーションと実機実験による検証を行う．シミュレーションと実機実験の際に使用する制御目標は，「平衡状態 $\epsilon = \lambda = 0$[deg] から $\epsilon = 0$[deg], $\lambda = 25$[deg] の状態に移動したあと，その場にとどまる」とした．シミュレーションでは, 30 秒後に ϵ と λ に定常外乱を加え, 外乱抑制性能を確かめた．

図 4 がシミュレーション結果, 図 5 が実験結果を示したグラフである．それぞれ状態変数である ϵ, ρ, λ の結果を記載した．黒の実線が目標値, 赤の実線が非線形 H^∞ 制御則を実装した結果, 青の実線が比較のため線形制御 $u(t) = K_{\mathrm{L}}x(t)$ のみを行った結果である．

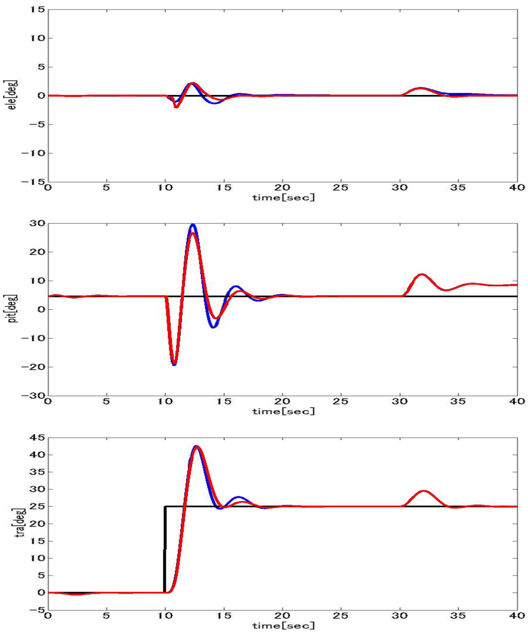

図 4 シミュレーション結果

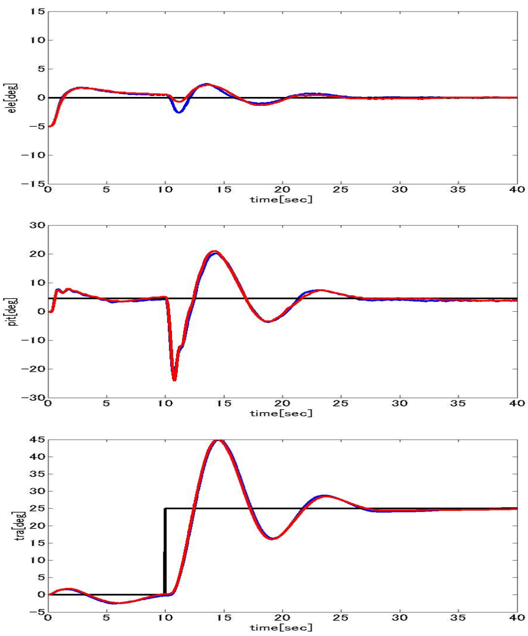

図 5 実験結果

シミュレーション結果では, 非線形制御, 線形制御ともに追従, 外乱抑制が行われており, 制御目的は達成されている．比較した場合, 若干ではあるが非線形 H^∞ 制御則を適用した結果の方が収束性や状態の変動を抑えられていることが見て取れる．この結果から, 非線形重みの導入により状態 ρ の変位による影響を考慮できているのではないかと推測される．

実験結果では, 非線形制御と線形制御の間に大きな違いはなく, 改善は見られなかった．シミュレーション結果と実験結果を比べると, 各状態変数の振る舞いが異なっていることが見て取れた．これにより, 実際のモデルと制御則作成時に使用しているモデルが異なっている可能性があるため, 狙った性能を十分に引き出せなかったのではと予想される．

5 おわりに

本研究では, ヘリコプタの数学モデルに対して非線形重みを導入した非線形 H^∞ 制御則の設計を試みた．その結果, シミュレーションではその効果が見られたものの, 実機実験では見られなかった．理由として, 制御則設計時に用いた数学モデルが実機と異なっていることが予想される．

さらに, 効果が微小だったことに対して, 非線形 H^∞ 制御則とシステムの内部安定性を保持する制御器 K_{L} を別で設計したことが問題ではないかと予想される．用いた非線形 H^∞ 制御則はシステムの内部安定性に依存しているため, 制御器 K_{L} の性能に大きく左右される．また, 制御器 K_{L} の設計の際に使用している重みが固定のものであり, 非線形 H^∞ 制御則で用いる非線形重みとは異なる．このような事実から, 非線形重みの役割が限られてしまい, 十分に活用することができていない可能性があると推測される．

以上の考察から, 今後の課題として, より精度の高いモデルの設計, 内部安定性を考慮した制御則の考案が挙げられる．参考文献 [2] では制御対象が内部安定でない場合の設計法を与えている．しかし, 制御対象が線形システムであるため, 今回の制御対象には適用できない．非線形の制御対象への拡張ができるかどうかは今後の課題である．

参考文献

[1] 三平満司, 大竹覚, 上村一整:「非線形 H^∞ 制御理論の限界と可能性—セミアクティブサスペンションへの応用—」, システム制御情報学会誌 43(10), 544-552, 1999.

[2] 清水悦朗, 久保田健太, 三平満司, 古賀雅伸:「非線形 H^∞ 状態フィードバックをもちいた線形システムに対する非線形制御則の一設計法」, 計測自動制御学会論文集 Vol.35, No.3, 333-339, 1999.

[3] Quanser Inc.: *Quanser 3-DOF Helicopter Laboratory Manual.* 2011.

[4] 加藤真:「擬似線形表現に基づく 3 自由度ヘリコプタの非線形制御」, 南山大学理工学研究科修士論文, 2015.