

不変集合解析に基づく非線形システムの動的量子化器設計

M2013SC003 荒川紘次

指導教員：大石泰章

1 はじめに

通常の制御理論において制御入力は連続値であると仮定することが多い。しかし、制御対象に搭載されたアクチュエータが ON-OFF 型の場合やデジタル制御の場合では、入力が離散値に限定される。この場合の入力生成法の 1 つは、図 1 の関数 q を用いて、連続値の入力 u を離散値の入力 $q(u)$ に変換する方法である。このような変換器を静的量子化器と呼ぶ [1]。しかし、これでは間隔 d が大きい場合、連続値入力のときに保証された制御性能が保証されなくなることがある。これに対して、東・杉江 [2][3] は、線形システム、非線形システムそれぞれの場合に関して、過去の量子化誤差を量子化器に保持する動的量子化器を考え、出力への量子化誤差の影響を最小化する、最適動的量子化器を解析的に導出した。しかし、入力が離散値に限定される場合は、入力の大きさに制限があることが多いが、こうした状況には対応していない。これに対して澤田・新 [4] は不変集合解析 [5] を用いることで、入力制約を考慮できる動的量子化器の設計手法を提案した。これは線形行列不等式を用いて定式化されており線形システムの場合のみを考えている。

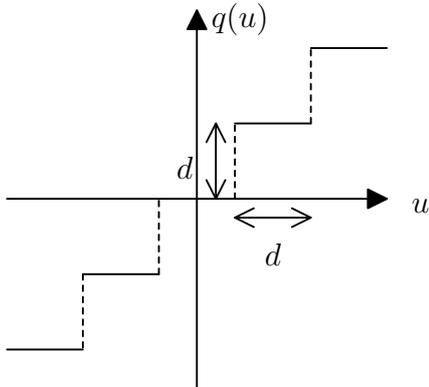


図 1 静的量子化器

本研究では、澤田・新の研究を拡張して、非線形システムに対する動的量子化器の設計を考える。すなわち、擬似線形表現 [6] を持つ非線形システムはパラメータ依存線形行列不等式を使って解析することができる。パラメータ依存線形行列不等式は二乗和多項式を用いて解くことができ、これを利用することで、澤田・新が用いた不変集合解析を擬似線形表現で表された非線形システムに適用することが可能になる。

2 問題設定

本研究では、図 2 と図 3 の 2 つの制御系について考える。 P は離散時間の制御対象、 K は離散時間の制御器で

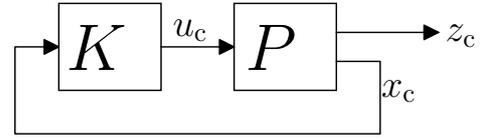


図 2 連続値入力の制御系 S_c

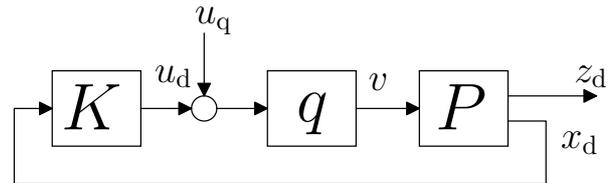


図 3 離散値入力の制御系 S_d

あり、それぞれ次のように与えられているとする：

$$P: \begin{cases} x(k+1) = A(x(k))x(k) + B(x(k))u(k), \\ z(k) = C(x(k))x(k), \end{cases}$$

$$K: u(k) = K(x(k))x(k).$$

$A(x), B(x), C(x), K(x)$ は x の多項式行列である。制御対象 P に関する上の表現は擬似線形表現と呼ばれている [6]。 S_c は入力が連続値の普通の制御系である。一方、 S_d は図 1 の静的量子化器 q を持ち、入力は離散値である。 S_c と S_d では、扱う入力が連続値入力と離散値入力異なるため、初期状態が同じでも制御対象 P の状態が異なってくる。そこで、 S_d の状態が S_c の状態と大きく異ならないようにするために、追加入力 u_q を加えることを考える。以下、 S_c の状態は添え字 c を用いて x_c と表し、 S_d の状態は添え字 d を用いて x_d と表す。入力と出力も状態と同様に、それぞれ u_c, z_c および u_d, z_d と表す。 v は静的量子化器 q で生成された離散値入力である。

静的量子化器 q を扱いやすくするため以下の変形を行う。 S_d において信号 v, u_d, u_q の関係は

$$v = q(u_d + u_q)$$

で表される。このとき静的量子化器で生じる量子化誤差 $v - (u_d + u_q)$ を w とかくと量子化器の性質より

$$|w(k)| \leq d/2$$

が成り立つ。次に、どのような動的量子化器が良いのかを考えていく。 S_c は量子化器がない理想的な制御系である。したがって、 S_d の状態 x_d と S_c の状態 x_c の差が小さいほど、量子化誤差の影響が小さく量子化器の性能が良いと考えられる。そこで、 S_d の追加入力 u_q は状態 x_d

と状態 x_c の偏差を小さくするように定める. 状態 x_d と状態 x_c の偏差 $x_d - x_c$ を状態空間表現で表すことにする. S_c の連続値入力システムを閉ループ系にすると

$$x_c(k+1) = (A(x_c(k)) + B(x_c(k))K(x_c(k)))x_c(k) \quad (1)$$

となる. 同様に, S_d の離散値入力システムを閉ループ系にすると

$$x_d(k+1) = (A(x_d(k)) + B(x_d(k))K(x_d(k)))x_d(k) + B(x_d(k))w(k) + B(x_d(k))u_q(k) \quad (2)$$

となる. ここで S_c の閉ループ系の状態は x_c であるので, 式 (1) では $A(x), B(x), K(x)$ の行列が x_c に依存していることに注意する. 一方, 式 (2) では x_d に依存している. S_d の閉ループ系は静的量子化器 q が付いているので, 量子化誤差の項 w が追加されている. 次に, 式 (2) から式 (1) を引くと

$$\begin{aligned} x_d(k+1) - x_c(k+1) &= (A(x_d) + B(x_d)K(x_d))x_d \\ &\quad - (A(x_c) + B(x_c)K(x_c))x_c \\ &\quad + B(x_d)w + B(x_d)u_q \end{aligned}$$

となる. ただし, 右辺の x_c や x_d はすべて時刻 k での値であり, これを省略した. ここで $x_d - x_c$ を \tilde{x} とかき, $A(x) + B(x)K(x)$ を $A_{cl}(x)$, $A_{cl}(x_d) - A_{cl}(x_c)$ を $\tilde{A}_{cl}(x_c, \tilde{x})$ とかくと, 式 (1), (2) をまとめて

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}(k+1) \\ x_c(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{cl}(x_c + \tilde{x}) & \tilde{A}_{cl}(x_c, \tilde{x}) \\ O & A_{cl}(x_c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B(x_c + \tilde{x}) \\ O \end{bmatrix} u_q + \begin{bmatrix} B(x_c + \tilde{x}) \\ O \end{bmatrix} w \quad (3)$$

と表せる. \tilde{x} は量子化誤差 w が状態 x_d に与える影響を表している.

以下では, 追加入力 u_q を用いることで \tilde{x} を小さくすることを考える. 特に追加入力 u_q は, $x_c(k)$ と $\tilde{x}(k)$ の多項式行列 $G(x_c(k), \tilde{x}(k))$ を使って

$$u_q(k) = G(x_c(k), \tilde{x}(k)) \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} \quad (4)$$

のように定めるものとし, $\tilde{x}(k)$ を小さくするためには $G(x_c(k), \tilde{x}(k))$ をどのように定めればよいかを考える. 得られる制御系は図4のように表すことができる. 離散値入力系の状態 x_d には現実の状態の測定値を使うが, 連続値入力系の状態 x_c はシミュレーションによって生成する. このシミュレーションの部分と G とを合わせたものが今回用いる動的量子化器である.

3 擬似線形表現に対する不変集合

本研究では澤田・新 [4] と同様に量子化誤差 w の下での不変集合を考える. 不変集合の定義を以下で与える.

【定義】 領域 \mathcal{W} を状態空間中の原点を含む領域とする. 擬似線形表現

$$x(k+1) = A(x(k))x(k) + B(x(k))w(k)$$

動的量子化器

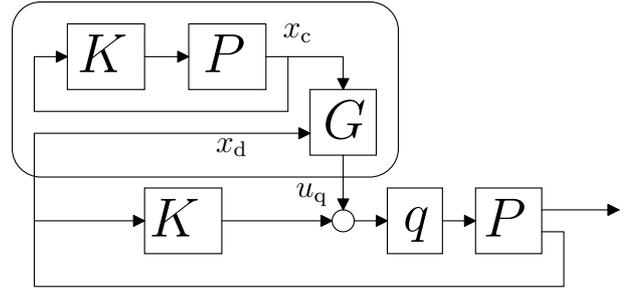


図4 動的量子化器の構造

において領域 \mathcal{W} 内の全ての x に対して $A(x)$ の固有値全てが1未満の絶対値をもつとき, 集合 \mathcal{X} で

$$x(k) \in \mathcal{X}, \|w(k)\|_2 \leq 1 \Rightarrow x(k+1) \in \mathcal{X} \quad (5)$$

を満たし, かつ $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ を満たすものを不変集合と呼ぶ.

この定義は新銀・太田の不変集合を擬似線形表現に拡張したものになっている. ただし, 条件 $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ が追加されている点が異なっている.

式 (3) のシステムがある不変集合 \mathcal{X} を持つならば, 初期値 $[\tilde{x}(0)^T \ x_c(0)^T]^T$ が不変集合 \mathcal{X} 内にある限り, 不変集合 \mathcal{X} から抜け出すことはない. したがって, 量子化誤差の影響 \tilde{x} も一定の範囲に限定される. 量子化器の性能という観点で言えば, この \tilde{x} の範囲はできるだけ小さいことが望ましい. 一方, 初期値 $[\tilde{x}(0)^T \ x_c(0)^T]^T$ が不変集合 \mathcal{X} に含まれる可能性を高くするため, $[0^T \ x_c(0)^T]^T$ の形のベクトルからなる集合 \mathcal{V} があらかじめ与えられていると考え, $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ なる不変集合 \mathcal{X} を持つような量子化器を考えることにする. ただし, 初期時刻において $x_c(0) = x_d(0)$, すなわち $\tilde{x}(0) = 0$ であると考えている. 図5に x_c が1次元の場合の不変集合 \mathcal{X} , 領域 \mathcal{W} , 領域 \mathcal{V} の関係図を示す. 一番外の領域 \mathcal{W} 内に不変集合 \mathcal{X} が含まれている. また, 不変集合 \mathcal{X} は x_c 軸上の集合 \mathcal{V} を含んでいる. γ は不変集合 \mathcal{X} 内の \tilde{x} の最大値を表しており, γ を最小化することで量子化誤差の影響を小さくできる.

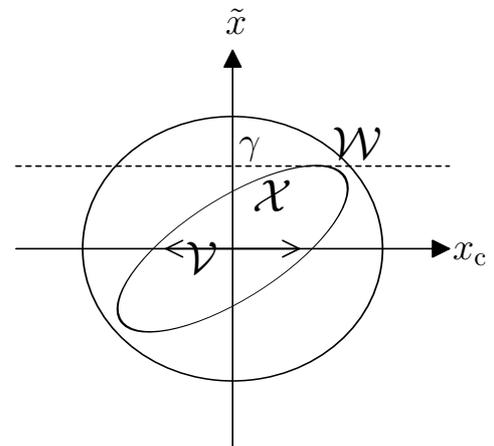


図5 不変集合 \mathcal{X} , 領域 \mathcal{W} , 領域 \mathcal{V} の関係図

動的量子化器の設計を簡単にするため、不変集合 \mathcal{X} は $2n$ 次の正定値行列 X を用いた楕円体

$$E(X) := \{x \in \mathbb{R}^{2n} : x^T X^{-1} x \leq 1\}$$

に限定する。ただし $x = [\tilde{x}^T \ x_c^T]^T$ である。同様に、領域 \mathcal{W} も $2n$ 次の正定値行列 W を用いて楕円体 $E(W)$ に限定する。領域 \mathcal{V} は n 次の正定値行列 V を用いた楕円体

$$E_0(V) := \{[0^T \ x_c^T]^T \in \mathbb{R}^{2n} : x_c^T V^{-1} x_c \leq 1\}$$

に限定する。以上のように不変集合 \mathcal{X} , 領域 \mathcal{W} , 領域 \mathcal{V} を限定した場合、不変集合 \mathcal{X} をパラメータ依存線形行列不等式を用いて評価することができる。以下に、式 (3) の A 行列, B 行列と式 (4) の G 行列をそれぞれ $A(x), B(x), G(x)$ とおき, $G(x)X$ を $Y(x)$ とおいたときのパラメータ依存線形行列不等式を与える:

$$\begin{bmatrix} (1-\alpha)X & O & XA(x)^T + Y(x)^T B(x)^T \\ O & \frac{4}{\alpha^2} \alpha & B(x)^T \\ A(x)X + B(x)Y(x) & B(x) & X \end{bmatrix} \succ 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}, \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} V^{-1} & \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} & X \end{bmatrix} \succ 0, \quad (7)$$

$$W - X \succ 0. \quad (8)$$

α は $\alpha \in (0, 1)$ を満たす定数とする。

式 (6) が成り立つとき、領域 \mathcal{W} 内のすべての x に対して式 (5) が成り立つ [4]。したがって、 $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ が成り立てば不変集合の定義が成り立つことになり、量子化誤差 w の影響を受けても、状態 x は不変集合 \mathcal{X} に留まり続ける。

式 (8) が成り立つとき $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ となる。以下にこれを示す。式 (8) は $X^{-1} - W^{-1} \succ 0$ と同値であるので、左から x^T , 右から x をかけると、

$$x^T X^{-1} x \geq x^T W^{-1} x$$

となる。したがって、 $x \in E(X)$ ならば $x \in E(W)$ が成り立つ。すなわち、 $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ である。

式 (7) が成り立つとき $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ となる。以下にこれを示す。式 (7) にシュールの補題を適用すると

$$V^{-1} - \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} O \\ I \end{bmatrix} \succ 0.$$

これに左から x_c^T , 右から x_c をかけると、

$$x_c^T V^{-1} x_c \geq \begin{bmatrix} 0^T & x_c^T \end{bmatrix} X^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ x_c \end{bmatrix}$$

となる。したがって、 $[0^T \ x_c^T]^T \in E_0(V)$ ならば $[0^T \ x_c^T]^T \in E(X)$ が成り立つ。すなわち、 $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ である。

4 出力の最小化と入力への制約

本章では、 \tilde{x} の最小化に関して考える。実際には、やや一般化して S_d の出力 $z_d = C(x_d)x_d$ と S_c の出力 $z_c = C(x_c)x_c$ の差の最小化を考える。 \tilde{x} を最小化したければ $C(x) = I$ であると考えればよい。さらに、離散値入力の範囲に制限がある場合でも設計できるようにする。 S_d の入力 $u_q + u_d$ と S_c の入力 u_c の差に制約を課すことで、量子化誤差から入力への影響を考慮することができる。したがって、連続値入力 u_c が制限を満たしているならば、入力の差 $u_q + u_d - u_c$ の制限を考慮すれば離散値入力の制限を考えることができる。出力の差 $z_d - z_c$ と入力の差 $u_q + u_d - u_c$ は

$$z_d - z_c = C(x_d)x_d - C(x_c)x_c,$$

$$u_q + u_d - u_c = G(x_c, \tilde{x}) \begin{bmatrix} \tilde{x}(k) \\ x_c(k) \end{bmatrix} + K(x_d)x_d - K(x_c)x_c$$

と表せる。ここで、 $z_d - z_c$ を \tilde{z} , $C(x_d) - C(x_c)$ を $\tilde{C}(x_c, \tilde{x})$, $u_d - u_c$ を \tilde{u} , $[K(x_d) \ K(x_d) - K(x_c)]$ を $\tilde{K}(x_c, \tilde{x})$ とかくと \tilde{z} と $u_q + \tilde{u}$ は

$$\tilde{z} = \begin{bmatrix} C(x_c + \tilde{x}) & \tilde{C}(x_c, \tilde{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_c \end{bmatrix},$$

$$\tilde{u} + u_q = \begin{bmatrix} \tilde{K}(x_c, \tilde{x}) + G(x_c, \tilde{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ x_c \end{bmatrix}$$

と書き換えることができる。ここで、 $\|\tilde{z}\|_\infty$ の最小化と $\|u_q + \tilde{u}\|_\infty$ の制約を考える。 ∞ ノルムの最小化と制約を考える場合は、以下の不等式を考えれば良い:

$$|c_i(x)x| \leq \gamma_z \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (9)$$

$$|(\tilde{k}_i(x) + g_i(x))x| \leq \gamma_u \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (10)$$

ここで、行列 $[C(x_c + \tilde{x}) \ \tilde{C}(x_c, \tilde{x})]$, $\tilde{K}(x_c, \tilde{x})$, $G(x_c, \tilde{x})$ の i 行目をそれぞれ $c_i(x)^T$, $\tilde{k}_i(x)^T$, $g_i(x)^T$ としている。あとはすべての i に対して式 (9), (10) が成り立つ制約の下で γ_z を最小化すれば $\|\tilde{z}\|_\infty$ の最小化と $\|u_q + \tilde{u}\|_\infty$ の制約ができる。以下に、式 (9), (10) がそれぞれ成り立つための十分条件をパラメータ依存線形行列不等式の形で与える。ただし、 $y_i(x)^T$ は $Y(x)$ の i 行目である:

$$\begin{bmatrix} \gamma_z^2 & c_i(x)X \\ Xc_i(x)^T & X \end{bmatrix} \succ 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_u^2 & \tilde{k}_i(x)X + y_i(x) \\ X\tilde{k}_i(x)^T + y_i(x)^T & X \end{bmatrix} \succ 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}. \quad (12)$$

式 (11) が成り立つとき、式 (11) にブロック対角行列 $\text{block-diag}(I, X^{-1})$ を用いて合同変換すると

$$\begin{bmatrix} \gamma_z^2 & c_i(x) \\ c_i(x)^T & X^{-1} \end{bmatrix} \succ 0, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

となる。さらに、シュールの補題を適用し、左から $\gamma_z x^T$, 右から $\gamma_z x$ をかけると

$$\gamma_z^2 x^T X^{-1} x \geq x^T c_i(x)^T c_i(x) x, \quad \forall x \in \mathcal{X}$$

となる。したがって、 $x \in E(X)$ を満たすような x は式 (9) を満たすことになる。式 (12) が式 (10) を導くことも同様に示すことができる。二乗和多項式で解く場合、 x の範囲として領域 \mathcal{X} を選ぶことはできない。しかし、 $\mathcal{X} \subset \mathcal{W}$ であるので、領域 \mathcal{X} の代わりに領域 \mathcal{W} を選ぶことで二乗和多項式でも解けるようになる。

5 数値実験

提案手法の有効性を示すため数値実験を行う。以下の制御対象 P を扱う：

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}hx_1(k)^2 - \frac{3}{2}hx_1(k) + 1 & -h \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ -h \end{bmatrix} u(k),$$

$$z(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k).$$

ここで、 h はサンプル時間で 0.01 としている。また $x_1(k)$ は $x(k)$ の第 1 成分である。制御対象 P に対する制御器 K を最適制御で設計してから、量子化誤差から状態 x_1 への影響をできるだけ小さくするように、動的量子化器の設計を行う。ここでは扱いを 3 章とはやや変えて、領域 \mathcal{W} , 領域 \mathcal{V} は多面体とし、以下のように選ぶ：

$$\text{領域 } \mathcal{W} : \begin{cases} -1.2 \leq x_1 \leq 1.2, \\ -0.11 \leq \tilde{x} \leq 0.11; \end{cases}$$

$$\text{領域 } \mathcal{V} : \begin{cases} -0.8 \leq x_1 \leq 0.8, \\ -0.4 \leq x_2 \leq 0.4. \end{cases}$$

領域 \mathcal{W} , 領域 \mathcal{V} を多面体を選んだとしても不変集合 \mathcal{X} を求めることができる。実際、式 (7) の代わりに、領域 \mathcal{V} のすべての端点が多面体 \mathcal{X} に含まれるようにする線形行列不等式を追加し、式 (8) の代わりに、領域 \mathcal{X} の各次元の最大値が領域 \mathcal{W} に含まれるようにする線形行列不等式を追加すればよい。

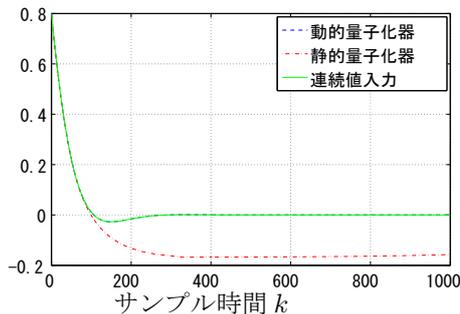


図 6 状態 $x_1(k)$ の比較

図 6 において、実線は連続値入力の場合の状態変化を表しており、一点鎖線は静的量子化器を使った場合の状態変化を、破線は動的量子化器を使った場合の状態変化をそれぞれ表している。動的量子化器の場合と連続値入力の場合ではほとんど差がなくグラフが重なっている。一方、静的量子化器の場合と連続値入力の場合では大きく差が出ている。すなわち、動的量子化器の方が静的量子

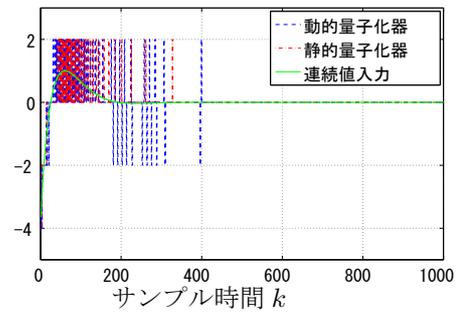


図 7 入力 $u(k)$ の比較

化器と比べて性能が良い。図 7 は対応する入力を示している。連続値入力の場合は連続値入力を使っており、動的量子化器と静的量子化器は離散値入力を使っている。

6 おわりに

本研究では、不変集合解析を使って非線形システムに対する動的量子化器の設計手法を提案した。東・杉江による非線形システムの動的量子化器設計では入力の制約を考慮できず入力が発散してしまう場合がある。一方、提案手法では非線形システムを擬似線形表現で表せるものに限定することで、入力の制約を考慮できるようにした。最後に、提案手法で動的量子化器の設計を行い、数値実験で有効性を示した。今回は、制御器が与えられている仮定の下で動的量子化器を設計した。しかし、制御器と動的量子化器は同時に設計の方が制御性能が向上する可能性が考えられる。したがって、今後の課題としては制御器と動的量子化器の同時設計が考えられる。

参考文献

- [1] 東俊一, 杉江俊治: 離散値入力型における最適動的量子化器. システム制御情報学会論文誌, vol. 20, no. 3, pp. 122–129, 2007.
- [2] 東俊一, 杉江俊治: 離散値入力フィードバック制御のための動的量子化器. 計測と制御, vol. 49, no. 11, pp. 795–800, 2011.
- [3] S. Azuma and T. Sugie: Dynamic quantization of nonlinear control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 4, pp. 875–888, 2012.
- [4] 澤田賢治, 新誠一: 離散値入力型 SISO システムに対する不変集合解析に基づく動的量子化器設計. システム制御情報学会論文誌, vol. 23, no. 11, pp. 122–129, 2010.
- [5] 新銀秀徳, 太田快人: 離散時間システムに対する最適な不変集合—有界入力に対する可到達集合近似. 計測自動制御学会論文集, vol. 46, no. 6, pp. 327–335, 2010.
- [6] S. Prajna, A. Papachristodoulou, and F. Wu: Nonlinear control synthesis by sum of squares optimization: a Lyapunov-based approach. In *Proceedings of the 5th Asian Control Conference*, Melbourne, Australia, pp. 157–165, July 2004.