データ構造を拡張した SN 比の分布に関する研究

M2012MM003 藤井裕之

指導教員：松田眞一

1　はじめに

企業にとってはますます品質は重要であり, そのために問題を未然に防ぐ方法がいくつか存在する. その一つが近年製造業を中心に関心の高いタグチメソッドである. さらなる品質向上にはデータ構造を拡張したものに対応した SN 比の分布論が必要だと思い, 過去の先輩の研究を参考にしつつ, 拡張されたデータ構造における SN 比の分布に関する研究を行っていこうと考えた.

2　過去の研究

堀井 [2] では永田 [5] が示した分布の導出を整備し、その SN 比の計算においては既存の近似法ではなくモンテカルロ法が妥当であると結論づけた. 前廣 [4] では他の近似法についての研究を行い,MCL-M 法が有効であると結論づけた. また, 高橋 [6] では実データに基づき SN 比の再現性の確認を行い, ± 3db は幅 6db に関しては問題が無いが, 対称性は無いために± 3db が緩い基準であることがわかった. 藤村 [1] では, シミュレーションに基づいて SN 比の再現性を確認し, 静特性ではすべての結果において下側に± 3db を切ったものが上回り, 動特性に関しては± 3db の値は緩い基準ではないため変更する必要はないという結果を得た,SN 比における± 3db は幅 6db における妥当性や対称性に関しては, 静特性と動特性は一律の基準ではないと結論づけた. しかし, 藤村 [1] までは 1 因子のみを制御因子として解析しており, データ構造を拡張した場合はどうなるのかを欠点としていた.

3　SN 比の再現性

一般には,SN 比の再現性は, 推定と確認での差が± 3db の間に入っていれば再現していると判断している. ± 3db とは,$10\log_{10}$ をとっているので, 約 $\frac{1}{2}$〜2 倍の間に入っていることを意味している.(立林 [7]・藤村 [1] 参照)

4　2 元配置データ構造の SN 比

主な導出結果は A_i 下の規定のものを表示する.

4.1　静特性 (望目特性) の SN 比

m 回繰り返しの制御因子が A と B で, 誤差因子が N だけの実験で得られたデータを表 1 とする. $\bar{x}_{A_i}$ は制御因子 A が i の水準の平均,V_{A_i} は制御因子 A が i の水準の時の不偏分散とする時, 因子 A に対する標本 SN 比は,

$$\gamma_{A_i} = 10\log_{10}\left(\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}}\right) \tag{1}$$

表 1　データ形式 (2 因子静特性)

水準		$N_1,\ldots,N_r$	平均	不偏分散	SN 比
A_1	B_1	$x_{1111},\ldots,x_{11r1}$ $\vdots$ $x_{1b1m},\ldots,x_{1brm}$	$\bar{x}_{A_1}$	V_{A_1}	γ_{A_1}
	$\vdots$	$\vdots$			
	B_b	$x_{1b11},\ldots,x_{1br1}$ $\vdots$ $x_{1b1m},\ldots,x_{1brm}$			
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_a	B_1	$x_{a111},\ldots,x_{a1r1}$ $\vdots$ $x_{a11m},\ldots,x_{a1rm}$	$\bar{x}_{A_a}$	V_{A_a}	γ_{A_a}
	$\vdots$	$\vdots$			
	B_b	$x_{ab11},\ldots,x_{abr1}$ $\vdots$ $x_{ab1m},\ldots,x_{abrm}$			

となる. ここで得られたデータ x_{ijkl} の構造を以下のように成り立つと考える.

$$x_{ijkl} = \acute{\mu}_{ij} + n_{ijk} + \epsilon_{ijkl} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij} + n_{ijk} + \epsilon_{ijkl} \tag{2}$$

$$\begin{cases} \acute{\mu}_{ij}\text{：制御因子の各水準での母平均} \\ (\acute{\mu}_{ij} = \mu + a_i + b_j + (ab)_{ij}) \\ n_{ijk}\text{：}A_iB_j\text{水準での誤差因子 }N_k\text{水準の影響の大きさ} \\ (n_{ijk} = n_k + (an)_{ik} + (bn)_{jk} + (abn)_{ijk}) \\ (\text{繰り返しなしの時は,}n_{ijk} = n_k + (an)_{ik} + (bn)_{jk}) \\ \epsilon_{ijkl}\text{：データを取る際に生じる誤差因子以外の誤差} \end{cases}$$

また,$(ab)_{ij}$ は制御因子 A が i で B が j のときの交互作用であり $\sum_i (ab)_{ij} = \sum_j (ab)_{ij} = 0$ であり,$c_{ijk} = b_j + (ab)_{ij} + n_{ijk}$ $(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} c_{ijk} = 0)$ とすると

$$x_{ijkl} = \mu + a_i + c_{ijk} + \epsilon_{ijkl} \tag{3}$$

と表せる. ここで誤差は $E(\epsilon_{ijkl}) = 0$,$V(\epsilon_{ijkl}) = \sigma_i^2$(ただし,$A_i$ の下で規定) とし, $\sum_{i=1}^{a} a_i = 0$,$\sum_{j=1}^{b} b_j = 0$,$\sum_{k=1}^{r} n_{ijk} = 0$ である. 母 SN 比は,

$$10\log_{10}\frac{(\mu + a_i)^2}{\frac{m\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} c_{ijk}^2}{brm-1} + \sigma_i^2} \tag{4}$$

となる. 次に誤差に正規性を仮定して確率分布を求める. スペースの関係上 $I = m\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r} c_{ijk}^2$ とする.

$$\frac{\bar{x}_{A_i}^2}{V_{A_i}} = \left\{\frac{\bar{x}_{A_i}}{\sqrt{V_{A_i}}}\right\}^2 =$$

$$\left\{\frac{(\bar{x}_{A_i}-\mu-a_i)/\sqrt{\sigma_i^2/brm}+(\mu+a_i)\sqrt{brm}/\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2\chi^2(brm-1,\frac{I}{\sigma_i^2})/(brm-1)}/\sqrt{\sigma_i^2/brm}}\right\}^2 \quad (5)$$

と変形できるので, 次のような分布になる.

$$\frac{brm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \sim \left\{t''\left(brm-1,\sqrt{brm}\frac{\mu+a_i}{\sigma_i},\frac{I}{\sigma_i^2}\right)\right\}^2 \quad (6)$$

2 重非心 t 分布の 2 乗は 2 重非心 F 分布となるので

$$\frac{brm\bar{x}_{Ai}^2}{V_{Ai}} \sim F''(1,brm-1;\delta_1,\delta_2)$$
$$\delta_1 = \frac{brm(\mu+a_i)^2}{\sigma_i^2}, \delta_2 = \frac{I}{\sigma_i^2} \quad (7)$$

となる. これより静特性 (望目特性) は上記で表される 2 重非心 F 分布に従うことがわかる.

4.2 動特性 (ゼロ点比例式) の SN 比

信号因子が $x_1,\ldots,x_m$ で制御因子が A と B で, 誤差因子が N だけの実験で得られたデータを表 2 とする.

表 2 データ形式 (2 因子動特性)

水準			$x_1,\ldots,x_m$	傾き	残差分散	SN 比
A_1	B_1	N_1	$y_{1111},\ldots,y_{11r1}$	$\hat{\beta}_{A_1B_1N_1}$	V_{eA_1}	γ_{A_1}
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
		N_r	$y_{1b1m},\ldots,y_{1brm}$	$\hat{\beta}_{A_1B_1N_r}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	B_b	N_1	$y_{1b11},\ldots,y_{1br1}$	$\hat{\beta}_{A_1B_bN_1}$		
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
		N_r	$y_{1b1m},\ldots,y_{1brm}$	$\hat{\beta}_{A_1B_bN_r}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_a	B_1	N_1	$y_{a111},\ldots,y_{a1r1}$	$\hat{\beta}_{A_aB_1N_1}$	V_{eA_a}	γ_{A_a}
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
		N_r	$y_{a11m},\ldots,y_{a1rm}$	$\hat{\beta}_{A_aB_1N_r}$		
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
	B_b	N_1	$y_{ab11},\ldots,y_{abr1}$	$\hat{\beta}_{A_aB_bN_1}$		
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
		N_r	$y_{ab1m},\ldots,y_{abrm}$	$\hat{\beta}_{A_aB_bN_r}$		

このとき因子 A に対する標本 SN 比は,

$$\gamma_{Ai} = 10\log_{10}\left(\frac{\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eA_i}}\right) \quad (8)$$

となる.($\hat{\beta}_{Ai}=\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\hat{\beta}_{AiBjNk}/br$ である.) 次に,y_{ijkl} のデータを各 $A_i(B_j)$ 全体の傾きと入力信号 x_l,$A_i(B_j)$ を誤差因子 N_k で場合分けしたときの傾きと誤差 ϵ_{ijkl} で以下のように成り立つと考える.

$$y_{ijkl} = \beta_{Ai}x_l + (\beta_{AiBjNk}-\beta_{Ai})x_l + \epsilon_{ijkl}(A_i\text{規定}) \quad (9)$$
$$y_{ijkl} = \beta_{Bj}x_l + (\beta_{AiBjNk}-\beta_{Bj})x_l + \epsilon_{ijkl}(B_j\text{規定}) \quad (10)$$

ここで誤差は $E(\epsilon_{ijkl})=0$,$V(\epsilon_{ijkl})={\sigma_i}^2$(ただし,$A_i$ の下で規定) である. つまり,

$$\hat{\beta}_{Ai} = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} y_{ijkl}x_l}{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} x_l^2}$$
$$= \beta_{Ai} + \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} x_l\epsilon_{ijkl}}{br\sum_{l=1}^{m} x_l^2} \quad (11)$$

であり, 期待値をとると,

$$E(\hat{\beta}_{Ai}) = \beta_{Ai} + \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} x_lE(\epsilon_{ijkl})}{br\sum_{l=1}^{m} x_l^2} = \beta_{Ai} \quad (12)$$

となる. 一方,S_{eAi} を下記のようにおいて計算すると,

$$S_{eAi} = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}\{y_{ijkl}-\hat{\beta}_{Ai}x_l\}^2$$
$$= \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\beta_{AiBjNk}-\beta_{Ai})^2\sum_{l=1}^{m}x_l^2 + \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}\epsilon_{ijkl}^2$$
$$- \frac{\left(\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m} x_l\epsilon_{ijkl}\right)^2}{br\sum_{l=1}^{m} x_l^2}$$
$$+ 2\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{m}(\beta_{AiBjNk}-\beta_{Ai})x_l\epsilon_{ijkl} \quad (13)$$

となる.$V_{eAi} = \frac{S_{eAi}}{brm-1}$ より,V_{eAi} の期待値をとると,

$$E(V_{eAi}) = \frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\beta_{AiBjNk}-\beta_{Ai})^2\sum_{l=1}^{m}x_l^2}{brm-1} + \sigma_i^2 \quad (14)$$

である. よって母 SN 比は,

$$10\log_{10}\frac{\beta_{Ai}^2}{\frac{\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\beta_{AiBjNk}-\beta_{Ai})^2\sum_{l=1}^{m}x_l^2}{brm-1}+\sigma_i^2} \quad (15)$$

となる. ここで, 誤差 ϵ_{ijkl} に正規性を持たせ, 静特性と同様に式変形行う. スペースの関係上 $J = \sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{r}(\beta_{AiBjNk}-\beta_{Ai})^2\sum_{l=1}^{m}x_l^2$ とする. 標準化を行うため,$V(\hat{\beta}_{Ai}) = \frac{\sigma_i^2}{br\sum_{l=1}^{m}x_l^2}$ より,

$$\frac{\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}} = \left\{\frac{\hat{\beta}_{Ai}}{\sqrt{V_{eAi}}}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{\sqrt{br\sum_{k=1}^{m}x_l^2}(\hat{\beta}_{Ai}-\beta_{Ai})/\sigma_i + \sqrt{br\sum_{k=1}^{m}x_l^2}\beta_{Ai}/\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2\chi'^2(brm-1,\frac{J}{\sigma_i^2})/(brm-1)}/\sqrt{\sigma_i^2/br\sum_{l=1}^{m}x_l^2}}\right\}^2 \quad (16)$$

となる. ゆえに, 以下の分布に従うことがわかる.

$$\frac{(br\sum_{l=1}^{m}x_l^2)\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}} \sim \left\{t''\left(brm-1, \sqrt{br\sum_{l=1}^{m}x_l^2}\frac{\beta_{Ai}}{\sigma_i}, \frac{J}{\sigma_i^2}\right)\right\}^2 \tag{17}$$

2 重非心 t 分布の 2 乗は 2 重非心 F 分布となるので,

$$\frac{(br\sum_{l=1}^{m}x_l^2)\hat{\beta}_{Ai}^2}{V_{eAi}} \sim F''(1, brm-1; \delta_1, \delta_2)$$
$$\delta_1 = \frac{(br\sum_{l=1}^{m}x_l^2)\beta_{Ai}^2}{{\sigma_i}^2}, \delta_2 = \frac{J}{\sigma_i^2} \tag{18}$$

が導かれる. よって, 動特性も 2 重非心 F 分布に従うことがわかる.

5 2 重非心 F 分布

2 重非心 F 分布 $F''(v_1, v_2, \lambda_1, \lambda_2)$ は複雑な密度関数を持つために直接的な分布計算は困難である. 本研究では前廣 [4] の作成した MCL-M 法の R 関数を近似として利用する.

6 SN 比の信頼区間の導出

2 重非心 F 分布に従う確率変数を F'' とし, 下側点の真値を f_1, 上側点の真値を f_2 とすると

$$P_r\{f_1 \le F'' \le f_2\} = 1 - \alpha$$

と表せる.f_1,f_2 の計算は $\frac{\alpha}{2}$ ずつ行う. 静特性の場合の SN 比の信頼区間は $[10\log_{10}\frac{f_1}{brm}, 10\log_{10}\frac{f_2}{brm}]$ となる. 動特性の場合の SN 比の信頼区間は $[10\log_{10}\frac{f_1}{br\sum x_k^2}, 10\log_{10}\frac{f_2}{br\sum x_k^2}]$ となる.(高橋 [6] 参照)

7 シミュレーションの手順

シミュレーションに使用するプログラムは, 藤村 [1] で使用されているものを基に作成を行った.

1. シミュレーションに使用する実験データを定める.
2. 実験データに対応する制御因子水準, 誤差因子水準, 有意水準などの数値を定める.
3. 以上により定められたデータ, 数値を元に, 制御因子の各水準での母平均, 制御因子の各水準での傾き, データを取る際に生じる誤差因子以外の誤差, 制御因子の各水準ごとの母分散などを推定する.
4. 誤差因子以外の誤差に正規乱数を与えることで 1000 回分のシミュレーションデータを作成し, その分析結果を得る.
5. 分析結果より,SN 比や幅などの出力を行う.

8 静特性シミュレーション

ある合板の接着力を高めるために, 因子として接着剤の種類 A を 3 水準, 前処理の方法 B を 3 水準設定し, 繰り返し 3 回 (誤差因子を 3 水準) の 2 元配置実験を行っている.(藤村 [1], 立林 [7] 参照)

表 3 合板データの結果 1

水準	上側 SN 比 (個)	下側 SN 比 (個)	SN 比 (個)	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1000	1000	1000	23.36	19.06	20.98
A2	1000	1000	1000	18.74	16.27	17.30
A3	1000	1000	1000	20.99	18.38	19.86
B1	1000	1000	1000	17.37	15.25	16.32
B2	1000	1000	1000	15.24	13.81	14.54
B3	1000	1000	1000	16.96	14.42	15.47

表 4 合板データの結果 2

水準	上幅 (回)	下幅 (回)	幅 (回)
A1	698	854	872
A2	981	1000	1000
A3	995	965	999
B1	996	996	1000
B2	1000	1000	1000
B3	956	997	996

8.1 シミュレーションの考察

ここでは結果のまとめ (表 3,4) を載せておき, それについて考察を行う.

SN 比の信頼区間の平均の幅は A 水準では 4.29db〜2.48db,B 水準では 2.54db〜1.44db となった. 次に, 幅に関しては, 約 8 割〜全部が 6db を切る結果になった.

SN 比の再現性± 3db と比較してみると, 上幅・下幅ともに± 3db を切る割合が多く,A3 のみ上寄りだが, その他は全て下寄りになっている, 上幅の平均の幅は A 水準では 2.38db〜1.13db,B 水準では 1.49db〜0.70db, 下幅の平均の幅は A 水準では 1.92db〜1.04db,B 水準では 1.07db〜0.73db となり,A,B 水準共に上幅の方が広い結果になった.

藤村 [1] の研究ではデータ構造が 1 元配置の時の SN 比の研究をしており, そのときの信頼区間の平均の幅は 7.72db〜7.42db. 幅は, 約 2 割が幅 6db を切った. これに比べると, データ構造が 2 元配置の時の SN 比の信頼区間の幅は短くなるというという結果になった.

また, 上幅・下幅に関しても, 藤村 [1] の研究では上幅は 1 割以下, 下幅は約 1〜2 割が± 3bd を切る結果になったが, データ構造が 2 元配置の時は± 3bd を切る割合は上幅・下幅共に約 7 割〜全部と割合が高くなり, 上幅・下幅共に短くなるというという結果になった. しかし, ± 3db 対称にならない点は共通している.

9 動特性シミュレーション

あるサーキットでの RC カーレースにおける 1 周タイムをシミュレーションにより採取したデータである. 制御因子 A をギア比 (2 水準), 制御因子 B を回転部分相当重量 (2 水準), 誤差因子をグリップ (3 水準), 信号因子をモータートルク (3 水準) とした.(かわにし [3] 参照)

9.1 シミュレーションの考察

ここでは結果のまとめ (表 5,6) を載せておき, それについて考察を行う.

また, 藤村 [1] の動特性のプログラムにはバグが存在し,

表 5 RC カー (動) の結果 1

水準	上側 SN 比 (個)	下側 SN 比 (個)	SN 比 (個)	上側 SN 比	下側 SN 比	SN 比
A1	1000	1000	1000	8.83	0.80	4.96
A2	1000	1000	1000	8.74	0.64	4.86
B1	1000	1000	1000	8.79	0.76	4.88
B2	1000	1000	1000	8.70	0.60	4.82

表 6 RC カー (動) の結果 2

水準	上幅 (回)	下幅 (回)	幅 (回)
A1	41	137	3
A2	42	143	2
B1	37	161	5
B2	32	136	2

修正してあるためシミュレーション結果は直接比較ではない.

SN 比の信頼区間の平均の幅は A 水準では 8.03db〜8.10db,B 水準では 8.03db〜8.11db となった. 次に, 幅に関しては, ほとんどが 6db を切らない結果になった.

SN 比の再現性± 3db と比較してみると, 上幅・下幅ともに± 3db を切る割合は上幅は 1 割未満, 下幅は約 1〜2 割で, 上寄りになっている. 上幅の平均の幅は A 水準では 3.877db〜3.872db,B 水準では 3.89db〜3.92db, 下幅の平均の幅は A 水準では 4.16db〜4.22db,B 水準では 4.11db〜4.22db となり,A,B 水準共に下幅の方が広い結果となった.

藤村 [1] の研究では, 動特性は 1 元配置のときは, 上下幅± 3db を切るものはなく, 信頼区間の幅が 6db を切るものもないと結論づけられている. しかし,2 元配置のときは, 上下幅± 3db を切るものが現れ, 信頼区間の幅も 6db を切るものが極少数ながら現れた. このことからは, 動特性も 2 元配置になると, 幅が短くなることがわかった. しかし, 静特性ほどは短くならなかった.

このことからは,2 元配置の動特性の再現性± 3db という基準は, 幅に対しては極まれに緩くなることがあると言える. 上下幅も対称性はなく± 3db が緩くなることがあるので信頼区間を使うべきだと思った.

10 まとめ

制御因子を 2 つにしたモデルの理論式は, 藤村 [1] の従来のモデルを基に, 永田 [5] の導出方法で導いた. これと同様に SN 比の信頼区間も高橋 [6] の導出方法で導いた. シミュレーションで用いたプログラムもこれと同様である.

タグチメソッドにおける SN 比の信頼区間について, 実データを基に誤差因子以外の誤差に正規乱数を与えることで 1000 回分のシミュレーションデータを作成し, 分析結果を得ると共に, 田口玄一氏の経験則による SN 比の再現性± 3db との関係,1 元配置データとの比較について調べた. その結果,1000 回平均については± 3db の幅 6db に対して, 静特性と動特性共に各シミュレーションの一番 SN 比の値がいいものだけをみると, 静特性の場合は全てが 6db を切る結果になったが, 動特性の場合は全てが 6db を切らない結果になった. また, ± 3db 対称にならない点は 1 元配置のときと同じである.

さらに,1000 回の内容については, 幅が 6db を切る割合について調べた. 静特性では幅が 6db を切る割合を調べてみると, 約 8 割〜全てという非常に高い割合で 6db を切る結果になった. 動特性では, 幅が 6db を切る割合は極わずかだった. しかし, ± 3db を切る割合は約 1 割以下〜約 2 割と 1 元配置に比べると短くなっていることがわかる. どちらの場合も,1 元配置に比べると幅が短くなるが, 静特性はその傾向が顕著に出てる結果になった.

したがって,2 元配置データにおける SN 比の再現性± 3db は, 静特性のときは非常に緩い基準になる. 動特性の場合でも幅に対してはまれに緩くなることがある. また, ± 3db の対称性はなく, 上下幅は緩くなることがある. 静特性・動特性いずれの場合でも信頼区間を使うべきという結論に至った.

11 おわりに

今回,2 元配置に拡張したデータの SN 比に関してシミュレーションを行ってわかったことは,1 元配置のときと比べると信頼区間の幅が短くなり, さらに静特性と動特性は一律の基準でないことが顕著に出たことである. また,2 元配置の静特性の場合は経験則の± 3db では緩すぎて判断できないこともわかった.

また, 理論やプログラムを構築するにも基となった理論・プログラムを理解した上で構築する必要があり, そういった点では苦労することが多かった. 参考文献の先輩方の論文やプログラムは間違っている部分があるので, そういった点は注意すべきたと思った.

参考文献

[1] 藤村良介:タグチメソッドの SN 比における信頼区間の性質に関する研究, 南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻修士論文,2012.

[2] 堀井里佳子:タグチメソッドの SN 比の統計的分布について, 南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻修士論文,2010.

[3] かわにし:お気楽 RC!, http://homepage3.nifty.com/kawanish/,2004.

[4] 前廣芳孝:2 重非心 F 分布の近似法の研究, 南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻修士論文,2011.

[5] 永田靖:統計的手法における SN 比, 第一回横幹連合総合シンポジュウム,2006.

[6] 高橋知也:タグチメソッドの SN 比における信頼区間の適応方法の研究, 南山大学大学院数理情報研究科数理情報専攻修士論文,2011.

[7] 立林和夫:『入門タグチメソッド』, 日科技連,2004.