2つの代数リッカチ方程式とフォーメーションフライト

M2012MM051 吉田賢司

指導教員：市川　朗

1　はじめに

円軌道上のフォーメーションフライトは多くの研究者によって考察されている．フィードバック制御を設計するとき，通常は線形2次レギュレータ理論のリッカチ方程式をもとに設計する．一方で，指数関数の重みを課す，異なる種類のレギュレータ問題が知られており，最適解は特異リッカチ方程式によって与えられる [1]．しかし，2つのリッカチ方程式によるフィードバック制御の比較は検討されていない．そこで，本研究では円軌道上のフォーメーション再構成問題について，2つの代数リッカチ方程式によるフィードバック制御の設計を比較する．フィードバック制御の燃費は入力の絶対積分 (L_1 ノルム) で評価する．線形2次レギュレータ理論のリッカチ方程式では制御入力の重みをパラメータとして変化させ，入力に指数関数の重みを課すレギュレータ理論の特異リッカチ方程式では指数関数のパラメータを変化させる．この2つの設計法について，整定時間 (目標軌道到達時間) と L_1 ノルムのグラフによる比較を行う．このグラフをもとにフィードバックを設計して制御入力の大きさやのフィードバックゲインの比較も行う．

2　フォーメーション問題の方程式

半径 R_0 の円軌道上の主衛星とその近傍の従衛星の相対運動を考えるため，主衛星の重心を原点とする図1の回転座標系 $o-\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ を考える．

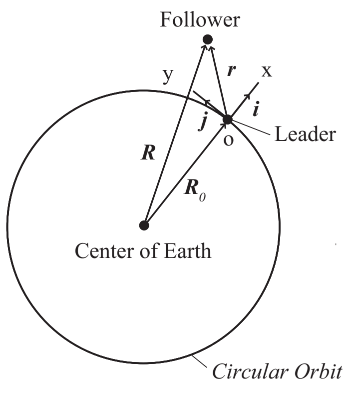


図1　円軌道上の主衛星

このとき相対位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ として，運動方程式を変形しそれぞれ$\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$,$\boldsymbol{k}$について係数を比較すると

$$\begin{aligned}\ddot{x}&=2n\dot{y}+n^2(R_0+x)-\frac{\mu}{R^3}(R_0+x)+u_x\\ \ddot{y}&=-2n\dot{x}+n^2y-\frac{\mu}{R^3}y+u_y\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu}{R^3}z+u_z\end{aligned}\tag{1}$$

が得られる．ここで $\boldsymbol{u}=[u_x\ u_y\ u_z]^T$ は従衛星に働く制御加速度，$R=[(R_0+x)^2+y^2+z^2]^{1/2}$ である [2, 3]．この方程式 (1) を原点 $x=y=z=0$ で線形化すると

$$\begin{aligned}&\ddot{x}-2n\dot{y}-3n^2x=u_x\\ &\ddot{y}+2n\dot{x}=u_y\\ &\ddot{z}+n^2z=u_z\end{aligned}\tag{2}$$

が得られる．この方程式は Hill-Clohessy-Wiltshire (HCW) 方程式とよばれる．推力を $\boldsymbol{u}=0$，初期値を $[x_0\ y_0\ \dot{x}_0\ \dot{y}_0\ z_0\ \dot{z}_0]^T$ として解き (2) 式をパラメータ表現すると

$$\begin{aligned}x(t)&=2c+a\cos(nt+\alpha)\\ y(t)&=d-3nct-2a\sin(nt+\alpha)\\ z(t)&=b\cos(nt+\beta)\end{aligned}\tag{3}$$

となる. ここで

$$\begin{aligned}&a=\left[(3x_0+2\dot{y}_0/n)^2+(\dot{x}_0/n)^2\right]^{1/2},\ c=2x_0+\dot{y}_0/n\\ &d=y_0-2\dot{x}_0/n,\ \sin\alpha=-\dot{x}_0/na\\ &\cos\alpha=-\left(3x_0+2\dot{y}_0/n\right)/a,\ b=[z_0^2+(\dot{z}_0/n)^2]^{1/2}\\ &\cos\beta=z_0/b,\ \sin\beta=-\dot{z}_0/nb\end{aligned}$$

である. 面外運動 $(z,\dot{z})$ は周期解となっている．面内運動 (x,y) は (3) 式において $c=0$ のとき周期解となる (CW 条件).

$\boldsymbol{x}=[x\ y\ \dot{x}\ \dot{y}\ z\ \dot{z}]^T$ とおくと (2) 式の状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\tag{4}$$

と表せる．ここで

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\3n^2&0&0&2n&0&0\\0&0&-2n&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&-n^2&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

である．

パラメータ (面内運動; 面外運動) $=(a,c,d,\alpha;b,\beta)$ により表される (4) 式の解を $\gamma^H=(a,c,d,\alpha;b,\beta)$ と表す．$c=0$ のときこの解は周期軌道となり $\gamma^H=(a,d;b)$ と表す．フィードバック制御によるフォーメーション形成問題とは，(4) 式の解を与えられた周期軌道 $\gamma_f^H=(a_f,d_f;b_f)$ に漸近的に追従させることである．このときの評価関数は，制御に使う推力の絶対積分 (L_1 ノルム) であり，これは消費燃料に比例する．特に従衛星の初期軌道が周期軌道であるときは，フォーメーション再構成問題となる [2].

3　フィードバックの設計

HCW システム (4) の周期解を目標軌道 $\boldsymbol{x}_f$ とし，初期軌道から，この軌道にフィードバック制御で移行させることを考える．目標軌道の方程式を

$$\dot{\boldsymbol{x}}_f = A\boldsymbol{x}_f, \boldsymbol{x}_f(0) = \boldsymbol{x}_{f0}$$

とおくと，この軌道との誤差 $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_f$ は

$$\dot{\boldsymbol{e}} = A\boldsymbol{e} + B\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{e}(0) = \boldsymbol{e}_0 \tag{5}$$

となり，フィードバック制御は

$$\boldsymbol{u} = -K\boldsymbol{e} \tag{6}$$

で与えられる．ここで K は，$A - BK$ が安定となる任意のフィードバックゲインである．K の設計には，2 次形式評価関数を最小にする次の 2 つの方法を用いる．

3.1　線形 2 次レギュレータ理論のリッカチ方程式

評価関数

$$J(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}_0) = \int_0^\infty (\boldsymbol{x}'(t)Q\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}'(t)R\boldsymbol{u}(t))dt \tag{7}$$

を最小化するフィードバックゲイン K は

$$K = R^{-1}B'X \tag{8}$$

で与えられる．ただし X はリッカチ方程式

$$A'X + XA + Q - XBR^{-1}B'X = 0 \tag{9}$$

を満たす解である．ここで Q は半正定，R は正定行列である．$(\sqrt{Q}, A)$ が可検出であるとき，リッカチ方程式は安定化解 ($A - BR^{-1}B'X$ が安定となる解）をもち，可観測であるときその解は正定となる．HCW システムはエネルギー零収束原点可制御 (NCVE)[4] であるので，Q を 0 に近づけるとき（または R を大きくしていくとき）X は 0 に収束し，フィードバック制御の 2 乗積分 (L_2 ノルム) は 0 に収束する．

3.2　入力に指数関数の重みを課した特異リッカチ方程式

安定化の条件の下で，評価関数

$$J_\gamma(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{x}_0) = \int_0^\infty \exp(\gamma t)\boldsymbol{u}'(t)R\boldsymbol{u}(t)dt \tag{10}$$

を最小化するフィードバックゲイン K_γ は

$$K_\gamma = R^{-1}B'X_\gamma \tag{11}$$

で与えられる．ただし X_γ はリッカチ方程式

$$A'X + XA - XBR^{-1}B'X + \gamma X = 0 \tag{12}$$

を満たす解である．この方程式を解くには (12) 式を

$$(A + \gamma/2\ I)'X + X(A + \gamma/2\ I) - XBR^{-1}B'X = 0$$

と変形する．X が逆行列をもつとすると $Y = X^{-1}$ は

$$-Y(A + \gamma/2\ I)' - (A + \gamma/2\ I)Y + BR^{-1}B' = 0$$

を満たす．A の固有値は虚軸上にあるので $(-A - \gamma/2\ I)$ は安定となる．従って，正定解 Y が存在し，$(-A - \gamma/2\ I, B)$ の可制御グラミアンという．以上よりリッカチ方程式 (12) は正定解をもつ．さらに

$$\begin{aligned}(A - BR^{-1}B'X)'X + X(A - BR^{-1}B'X)\\ = -\gamma X - XBR^{-1}B'X < 0\end{aligned}$$

であるから $A - BR^{-1}B'X$ は安定となる．このときフィードバック $K_\gamma = BR^{-1}B'X$ は減衰率 $\gamma/2$ をもつことを示す．リッカチ方程式

$$A'X + XA + Q - XBR^{-1}B'X + \gamma X = 0$$

は，$A + \gamma/2I - BR^{-1}B'X$ が安定となる解をもつ．このとき $A - BR^{-1}B'X$ は減衰率 $\gamma/2$ となる．Q を 0 に近づけると X はリッカチ方程式 (12) の解に収束する．従って $K_\gamma = BR^{-1}B'X$ は減衰率 $\gamma/2$ をもつ [1]．HCW システムは NCVE であるので γ を 0 に近づけるとき，リッカチ方程式 (12) の解は 0 に収束し，フィードバック制御の 2 乗積分 (L_2 ノルム) も 0 に収束する．

4　シミュレーション

ここでは円軌道の半径および角速度を用いて状態方程式 (4) を無次元化したシステム $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

により，2 つの設計法について L_1 ノルム，L_2 ノルムと整定時間の違いを，リッカチ方程式の重み R，γ を変えながらシミュレーションで考察する．初期値と目標値はそれぞれ

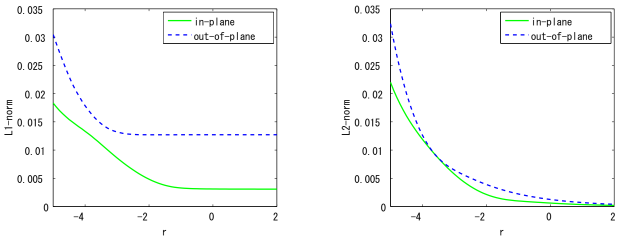
$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_0 &= [0.01\ 0\ 0\ -0.02\ 0.01\ 0]^T,\\ \boldsymbol{x}_f &= [0.005\ 0\ 0\ -0.01\ 0\ 0]^T\end{aligned} \tag{14}$$

とする．整定条件である目標軌道までの軌道誤差 $\boldsymbol{e}$ は 1.00×10^{-5} 以内とする．このときのパラメータは $\gamma_0^H = (a_0, d_0; b_0) = (0.01, 0, 0.01)$，$\gamma_f^H = (a_f, d_f; b_f) = (0.005, 0, 0)$ である．

4.1　線形 2 次レギュレータ理論のリッカチ方程式

まず，線形 2 次レギュレータ理論のリッカチ方程式 (9) のフィードバックについて考える．フィードバックは (6),(8) で与えられる．このときの評価関数は (7) の x を e に置き換えたものである．このシステムは NCVE であるので入力 u を小さくして L_1 ノルムを小さくするために，状態の

重み Q は小さな値に固定する．リッカチ方程式 (9) のパラメータをそれぞれ $Q = diag(q_i), q_i = 1.00 \times 10^{-3} (i = 1,2,5), q_i = 0.00 (i = 3,4,6)$，$R = 10^r I_{3\times3}$ として r の値を大きくして制御入力の重みを変化させる．



(a) $r - L_1$ ノルム　　(b) $r - L_2$ ノルム

図 2　$r - L_1, L_2$ ノルム

図 2(b) から，r の値が大きくなると L_2 ノルムの極限が 0 に向かうことが確認できる (NCVE である)．また図 2(a) から，r の値が大きくなると入力 u が小さく抑えられるため L_1 ノルムが小さくなることがわかる．L_1 ノルムは一定値 ($L_1 = 0.00308, L_1z = 0.0127$) まで小さくなる．

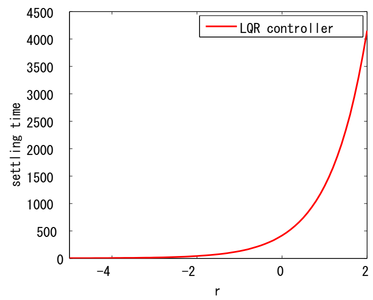


図 3　$r -$ 整定時間

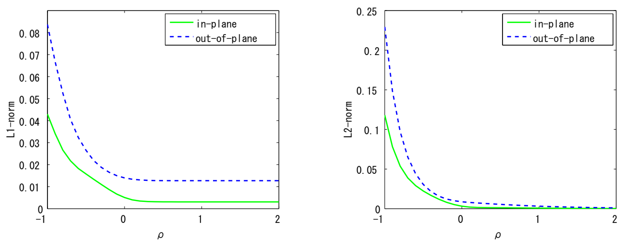
図 3 から，r の値が大きくなると入力 u が小さく抑えられるため整定時間が急激に大きくなることがわかる．

4.2　入力に指数関数の重みを課した特異リッカチ方程式

次に，入力に指数関数の重みを課したときのレギュレータ理論の特異リッカチ方程式 (12) のフィードバックについて考える．フィードバックは (6)，(11) となる．このときの評価関数は (10) である．ここでもシステムは NCVE であるので入力 u を小さくして L_1 ノルムを小さくする．特異リッカチ方程式 (12) のパラメータをそれぞれ $R = I_{3\times3}$，$\gamma = 10^{-\rho}$ として ρ の値を大きくして γ を変化させる．

リッカチ方程式 (9) のときと同様に，図 4(b) から，ρ の値が大きくなると L_2 ノルムの極限が 0 に向かうことが確認できる (NCVE である)．また図 4(a) から，ρ の値が大きくなると入力 u が急激に抑えられるため L_1 ノルムが小さくなることがわかる．L_1 ノルムは最適レギュレータと同じ値まで小さくなる．

図 5 から，ρ の値が大きくなると入力 u が小さく抑えられるため整定時間が大きくなることがわかる．



(a) $\rho - L_1$ ノルム　　(b) $\rho - L_2$ ノルム

図 4　$\rho - L_1, L_2$ ノルム

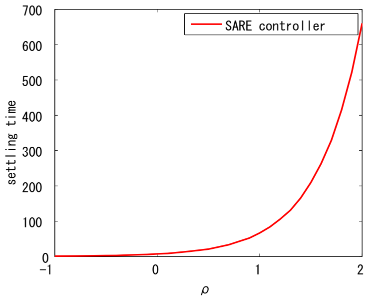
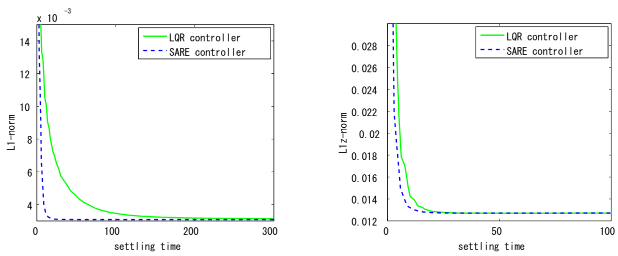


図 5　$\rho -$ 整定時間

4.3　フィードバック設計法の比較

2 つのリッカチ方程式による設計法の違いを比較したものが図 6 である．



(a) 面内運動　　(b) 面外運動

図 6　整定時間 $- L_1$ ノルム

図 6 から，リッカチ方程式 (LQR) の重み Q の速度成分を 0 としたときは，整定時間が小さいとき，特異リッカチ方程式 (SARE) を用いたほうが短時間・低燃費なフィードバックを設計できることがわかる．

ここで，L_1 ノルムに差があるときについて，整定時間を 4π(2 周期) と指定したときのフィードバックを設計して 2 つの代数リッカチ方程式による設計の違いを調べる．

4.3.1　整定時間を指定する場合

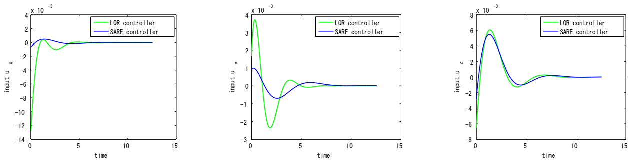
整定時間が 4π であるときのパラメータを図 3 と図 5 から求めてフィードバックを設計する．そのときの L_1 ノルムは図 2 と図 4 や図 6 から求める．

表 1 から，整定時間 (ST) が同じとき L_1 ノルムは SARE のほうが小さくなる．SARE のほうが L_1 ノルムが小さい理由は，図 7 から入力 u が小さく抑えられているから

である．そのため入力の絶対積分である L_1 ノルムも小さくなるのである．

表 1　シミュレーション結果

	r	ρ	L_1	L_1z	ST
LQR	-3.24		0.00976	0.0137	4π
SARE		0.273	0.00327	0.0129	4π



(a) 入力 $\boldsymbol{u}_x$　(b) 入力 $\boldsymbol{u}_y$　(c) 入力 $\boldsymbol{u}_z$

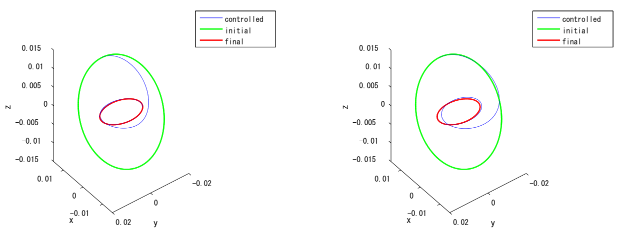
図 7　時間 – 入力 $\boldsymbol{u}$

このとき設計したフィードバックゲインは次のようになった．

$$K=\begin{bmatrix} 3.92 & -1.27 & 2.14 & 0.691 & 0.00 & 0.00 \\ 3.15 & 0.371 & 0.691 & 1.74 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.659 & 1.15 \end{bmatrix},$$

$$K_\gamma=\begin{bmatrix} 1.19 & -0.0732 & 0.550 & 0.525 & 0.00 & 0.00 \\ 2.98 & -0.0814 & 0.525 & 1.58 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.284 & 1.07 \end{bmatrix}.$$

ゲインの各要素の絶対値は K_γ のほうが小さくなるため，SARE のほうが入力 u が小さいことがわかる．また，このときの制御軌道は図 8 のようになった．



(a) LQR controller　(b) SARE controller

図 8　制御軌道

図 7 からリッカチ方程式 (LQR) のほうがはじめに大きな入力を与えるため，LQR(図 8(a)) のほうが早く目標軌道に近づくことがわかる．

4.4　速度に重みを付加するとき

次に，重み Q の速度成分に重みを課して整定時間が小さいときのリッカチ方程式 (LQR) の L_1 ノルムの改善を図る．

図 6(b) から，面外運動の L_1 ノルムの差はなかったため，リッカチ方程式 (LQR) の重み Q の面内運動の速度成分 (3,3)，(4,4) に重みを課して L_1 ノルムの改善を図った．その結果が図 9 である．重みを 0 としたグラフと特異リッカチ方程式 (SARE) のグラフの間に表れている．

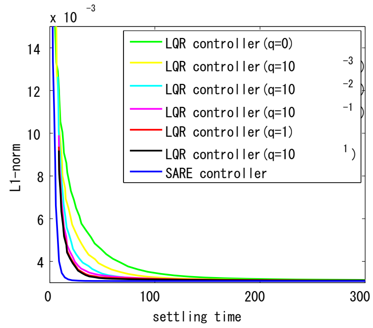


図 9　整定時間 – L_1 ノルム (面内運動)

リッカチ方程式 (LQR) の速度成分の重みを少しずつ大きくすると特異リッカチ方程式 (SARE) のグラフに傾きが近づいていくことがわかる．しかし，$q=1$ と $q=10^1$ のグラフはほとんど重なっている．そのため，速度成分に重みを課しただけでは特異リッカチ方程式 (SARE) の燃費性能までは近づけられないことがわかった．

5　考察

特異リッカチ方程式 (SARE) のほうが燃費性能が良い理由の 1 つに，重みの課し方の違いがある．特異リッカチ方程式 (SARE) はリッカチ方程式 (LQR) の重みを $Q=\gamma X$ としたものである．物理的に意味のある対角成分以外にも重みを課すことによって燃費性能を向上させることができると考えられる．

6　おわりに

整定時間ーL_1 ノルムのグラフ (図 6) から，2 つの代数リッカチ方程式によるフィードバックの設計法を比較した．このグラフから，特異リッカチ方程式を用いたほうが整定時間と L_1 ノルムが小さくなり，短時間・低燃費なフィードバックを設計できることがわかった．この理由は，整定時間を指定したときの入力のグラフ (図 7) を比較することで，入力が小さく抑えられていることによって確認できた．

参考文献

[1] B. Zhou, G. Duan and Z. Lin:A Parametric Lyapunov Equation Approach to the Design of Low Gain Feedback, IEEE Transaction on Automatic Control, Vol. 53, No. 6, pp. 1548-1554, 2008.

[2] A. Ichikawa:Recent Developments in Formation Flying, Lecture Notes ver.1, 2010.

[3] M. Shibata and A. Ichikawa:Orbital Rendezvous and Flyaround Based on Null controllability with Vanishing Energy, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 30, No. 4, pp. 934-945, 2007.

[4] A. Ichikawa:Null Controllability with Vanishing Energy for Discrete-Time Systems, Systems & Control Letters, Vol. 57, No. 1, pp. 34-38, 2008.