不確かな線形時不変システムのための 2 次安定判別条件

M2011MM033 金田 知也
指導教員：高見 勲

1 はじめに

本論文では, 不確かさを多項式の形で含む線形時不変システムに対して, 従来より知られている線形分数変換 (LFT) を用いた手法に比べ, より保守性の少ない結果を与える設計手法を提案する. 具体的には, 冗長なディスクリプタ変数を用い, 多項式の形で不確かさを含む項を不確かさに関して 1 次の形で取り出す. 不確かさの取り出しを行う際に, 次元の拡張を最小限に抑えることで, 共通なリアプノフ行列の拡張を抑える.

不確かさを 2 次の多項式で含む場合, n 次の多項式で含む場合と分けて述べていく. 不確かさを 2 次の多項式で含む場合において, LFT 形式を用いた従来法と提案法の LMI を比較し, ある条件下で従来法の LMI を満たすことが提案法の LMI を満たすための十分条件となることを証明する.

不確かさを n 次の多項式で含む場合において, 提案法が, 従来法と同等または, より小さい拡張で不確かさに関して 1 次の形へ変換できることを示す.

近年, ロバスト制御系設計におけるさまざまな問題に対して, 冗長なディスクリプタ変数を導入することで, 問題がより容易に記述できる, より保守性の低い設計が可能である, などの報告がある [1]-[3]. 中でも, 不確さを含むパラメータが非線形な形で状態方程式に存在する制御対象に対して, ディスクリプタ表現を用いて, より保守性の少ない制御系の設計, 解析を行う研究が注目を集めている [1], [3]. 不確さを含むシステムに対処する設計手法として, ポリトープ形式を用いる手法が広く知られている. この手法は, 不確かさを含むパラメータが 1 次またはマルチアフィンの形でシステムに依存する場合に, 不確かさパラメータがとる値の端点の LMI を連立して解くことで 2 次安定化をはかる手法である. したがって, 不確かさを含むパラメータが多項式の形で状態方程式に存在する場合, LFT などを用いて, 依存の形を 1 次に変換する必要がある.

複雑な形式で不確かさがシステムに存在する場合, 不確かさの取り出し方は複数考えられる. また, 取り出し方によってシステムの過度な次元の拡張をもたらす. これらの課題に対し, LFT 形式の枠組みにおいて, 次元の拡張を最小限に抑えるアルゴリズムがすでに提案されている [4]. これらの従来法と比較を行い提案法の有効性を検証する. .

2 問題設定

不確かさ $\mathbf{q} \in \{q_1, q_2, \ldots, q_p\}$ で構成される多項式 $\mathbf{q}^n$ を係数行列に含む, 線形時不変システム (1) について考える.

$$\left\{ \begin{array}{rl} \dot{x} = & A(\mathbf{q}^n)x + Bw \\ z = & Cx \end{array} \right. \tag{1}$$

ここで, $x \in \mathbf{R}^m$ は状態変数, $w \in \mathbf{R}^s$ は外乱入力, $z \in \mathbf{R}^k$ は評価出力である. また, 多項式 $\mathbf{q}^n$ の最大次数は n 次であるとする. リアプノフの定理より, システム (1) が安定であるための十分条件は (2) 式を満たす $X > 0$ が存在することである.

$$A(\mathbf{q}^n)X + XA^T(\mathbf{q}^n) < 0 \tag{2}$$

(2) 式は不確かさを多項式の形で含むため, 不確かさの上下界の LMI を連立し 2 次安定化をはかることができない. ポリトープ形式を用いて, 2 次安定判別問題を考えるためには, 依存の形を多項式から 1 次またはマルチアフィンの形に変換する必要がある.

従来より, 依存の形を 1 次の形に変換する手法として LFT 形式を用いる手法が知られている [4]. (1) 式の $\dot{x} = A(\mathbf{q}^n)x$ は (3) 式とおき LFT 形式を用いることで (4) 式の閉ループ系と置き換えることができる.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}^n) &= A_\delta + B_\delta \Delta(\mathbf{q})(I - \Delta(\mathbf{q})D_\delta)^{-1}C_\delta \\ \Delta(\mathbf{q}) &= \mathrm{diag}\left[q_1 I_{r_1}, q_2 I_{r_2}, \cdots, q_p I_{r_p}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{rl} \dot{x} = & A_\delta x + B_\delta \delta_w \\ \delta_z = & C_\delta x + D_\delta \delta_w \\ \delta_w = & \Delta(\mathbf{q})\delta_z \end{array} \right. \tag{4}$$

システム Σ が 2 次安定であることと, $\dot{x} = A(\mathbf{q}^n)x$ が 2 次安定であることは等価である. (4) 式の閉ループ系に対し, 以下の補題が知られている.

補題 1 システム Σ が 2 次安定であるための十分条件は (5) 式を満たす $X > 0$, $\hat{X}_{21}$, $\hat{X}_{22}$ が存在することである [5], [6].

$$\mathrm{He}\left\{ \begin{bmatrix} A_\delta & B_\delta \Delta(\mathbf{q}) \\ C_\delta & -I + D_\delta \Delta(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X & 0 \\ \hat{X}_{21} & \hat{X}_{22} \end{bmatrix} \right\} < 0 \tag{5}$$

(5) 式の左右から $[I \;\; B_\delta \Delta(\mathbf{q})(I - D_\delta \Delta(\mathbf{q}))^{-1}]$ とその転置をかけると, (2) 式を得る.

(5) 式は不確かさに関して 1 次の形で表現されている. (5) 式は各不確かさパラメータがとる値の端点の LMI を連立して解くことで 2 次安定化をはかることができる. 本論文では, (5) 式の 2 次安定判別条件より, 保守性の少ない 2 次安定判別条件を提案する.

3 最大次数が 2 次の場合

システム (1) について考える. ただし, 不確かさを含む項の最大次数 n が 2 次であるとする. 冗長なディスクリプタ変数を用い, 2 次の多項式の形で不確かさを含む $A(\mathbf{q}^2)$ に対して不確かさを 1 次の形で取り出す. システム (1) の $A(\mathbf{q}^n)$ を $A(\mathbf{q}^2)$ とし (6) 式と表現する.

$$\begin{aligned} A(\mathbf{q}^2) &= A_0 + B_\delta \Delta_b(\mathbf{q})(C_{\delta_1} + \Delta_c(\mathbf{q})C_{\delta_2}) \\ \Delta_b(\mathbf{q}) &= \mathrm{diag}\left[q_1 I_{b_1}, q_2 I_{b_2}, \cdots, q_p I_{b_p}\right] \\ \Delta_c(\mathbf{q}) &= \mathrm{diag}\left[q_1 I_{c_1}, q_2 I_{c_2}, \cdots, q_p I_{c_p}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

ここで, A_0 は $A(\mathbf{q}^2)$ から不確かさを含む項を全て取り出された行列とする．システム (1) の $\dot{x}=A(\mathbf{q}^2)x$ は (6) 式を代入し変数 ξ を与えることで (7) 式のように置き換えることができる．

$$\Gamma:\left\{\begin{array}{rl}\dot{x}= & A_0x+B_\delta\Delta_b(\mathbf{q})\xi\\ \xi= & (C_{\delta_1}+\Delta_c(\mathbf{q})C_{\delta_2})x\end{array}\right. \quad (7)$$

システム Γ が 2 次安定であることと, $\dot{x}=A(\mathbf{q}^2)x$ が 2 次安定であることは等価である．また, システム (7) に対してディスクリプタ変数を $\hat{x}:=[x^T\ \ \xi^T]^T$ とすると, (8) 式を得る．

$$\left[\begin{array}{cc} I & 0\\ 0 & 0\end{array}\right]\dot{\hat{x}}=\left[\begin{array}{cc} A_0 & B_\delta\Delta_b(\mathbf{q})\\ C_{\delta_1}+\Delta_c(\mathbf{q})C_{\delta_2} & -I\end{array}\right]\hat{x} \quad (8)$$

(8) 式より以下の定理を得る．

定理 1　システム Γ が 2 次安定であるための十分条件は (9) 式を満たす $X>0$, S_{21}, S_{22} が存在することである．

$$\mathrm{He}\left\{\left[\begin{array}{cc} A_0 & B_\delta\Delta_b(\mathbf{q})\\ C_{\delta_1}+\Delta_c(\mathbf{q})C_{\delta_2} & -I\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} X & 0\\ S_{21} & S_{22}\end{array}\right]\right\}<0 \quad (9)$$

(9) 式の左右から $[I\ \ B_\delta\Delta_b(\mathbf{q})]$ とその転置をかけると, (2) 式を得る．(9) 式は不確かさに関して 1 次の形で表現されている．したがって, 各不確かさパラメータがとる値の端点の LMI を連立して解くことで 2 次安定化をはかることができる．

LFT 表現は不確かさの次数分次元を拡張する必要がある．提案法は不確かさを対角に並べた行列を 2 分割して与えることで, 従来法と同等または, より小さい次元で問題を表現できる．提案法は従来法と同等または, より小さい次元で, 同じ 2 次安定判別条件を表現していることから, より保守性の低い 2 次安定判別条件であることが期待できる．

3.1　証明

従来法と提案法の比較を行うため, (5) 式と (9) 式の関係を明らかにする．従来法の LMI, 提案法の LMI それぞれに対して, 変換行列を用いて同値変換を行う．提案法の LMI が従来法の LMI の一部となることを示す．(5) 式の LMI を (10) 式と定義する．

$$\begin{aligned}\mathbf{\Sigma}:=&\mathrm{He}\left\{\left[\begin{array}{c|c} A_\delta & B_\delta\Delta(\mathbf{q})\\ \hline C_\delta & -I+D_\delta\Delta(\mathbf{q})\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} X & 0\\ \hline \hat{X}_{21} & \hat{X}_{22}\end{array}\right]\right\}\\ =&\mathrm{He}\left\{\left[\begin{array}{c|cc} A_\delta & B_{\delta_1}\Delta_1 & 0\\ \hline C_{\delta_1} & -I & \Delta_2\\ C_{\delta_2} & 0 & -I\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc} X & 0 & 0\\ \hline X_{21} & X_{22} & X_{23}\\ X_{31} & X_{32} & X_{33}\end{array}\right]\right\}<0\\ &\Delta(\mathbf{q})=\mathrm{diag}\,[\Delta_1,\Delta_2] \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式の左右から変換行列 (11) 式とその転置をかけると, (16) 式を得る．

$$T:=\left[\begin{array}{ccc} I & B_{\delta_1}\Delta_1 & B_{\delta_1}\Delta_1\Delta_2\\ 0 & I & 0\\ 0 & I & \Delta_2\end{array}\right] \quad (11)$$

$$L_{11}:=(A_\delta+B_{\delta_1}\Delta_1C_{\delta_1}+B_{\delta_1}\Delta_1\Delta_2C_{\delta_2})X \quad (12)$$

$$L_{13}:=-B_{\delta_1}\Delta_1(X_{22}+\Delta_2X_{23})^T \quad (13)$$

$$L_{31}:=(C_{\delta_1}+\Delta_2C_{\delta_2})X-X_{21} \quad (14)$$

$$L_{33}:=-X_{22}-\Delta_2X_{23} \quad (15)$$

$$T\mathbf{\Sigma}T^T=\mathrm{He}\left\{\left[\begin{array}{ccc} L_{11} & * & L_{13}\\ * & * & *\\ L_{31} & * & L_{33}\end{array}\right]\right\}<0 \quad (16)$$

(9) 式の LMI を (17) 式とおく．

$$\begin{aligned}\mathbf{\Gamma}:=&\mathrm{He}\left\{\left[\begin{array}{cc} A_0 & B_\delta\Delta_b(\mathbf{q})\\ C_{\delta_1}+\Delta_c(\mathbf{q})C_{\delta_2} & -I\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} X & 0\\ S_{21} & S_{22}\end{array}\right]\right\}\\ =&\mathrm{He}\left\{\left[\begin{array}{cc} A_0 & B_\delta\Delta_1\\ C_{\delta_1}+\Delta_2C_{\delta_2} & -I\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} X & 0\\ S_{21} & S_{22}\end{array}\right]\right\}<0\end{aligned} \quad (17)$$

(17) 式の左右から変換行列 (18) 式とその転置をかけると, (23) 式を得る．

$$U:=\left[\begin{array}{cc} I & B_\delta\Delta_1\\ 0 & I\end{array}\right] \quad (18)$$

$$N_{11}:=(A_0+B_\delta\Delta_1C_{\delta_1}+B_\delta\Delta_1\Delta_2C_{\delta_2})X \quad (19)$$

$$N_{12}:=-B_\delta\Delta_1S_{22}^T \quad (20)$$

$$N_{21}:=(C_{\delta_1}+\Delta_2C_{\delta_2})X-S_{21} \quad (21)$$

$$N_{22}:=-S_{22} \quad (22)$$

$$U\mathbf{\Gamma}U^T=\mathrm{He}\left\{\left[\begin{array}{cc} N_{11} & N_{12}\\ N_{21} & N_{22}\end{array}\right]\right\}<0 \quad (23)$$

ここで, (10) 式の X_{23} を $X_{23}=0$ とすると, L_{13}, L_{33} の第 2 項は 0 となり, $X_{13}=S_{12}$, $X_{31}=S_{21}$, $X_{33}=S_{22}$, $A_\delta=A_0$, $B_{\delta_1}=B_\delta$ と代入すると $L_{13}=N_{12}$, $L_{31}=N_{21}$, $L_{33}=N_{22}$ となる．すなわち, $X_{23}=0$ という制約を従来法の LMI に与えると, (23) 式の LMI は (16) 式の LMI の一部となり, (10) 式を満たす解が存在するならば, (17) 式は必ず解を持つといえる．したがって, 従来法の LMI ($X_{23}=0$) を満たすことは, 提案法の LMI を満たすための十分条件である．

3.2　数値例

提案する手法の有効性を数値例によって検証する．それぞれの手法に対して数値例を用い, ロバスト H_2 性能解析を行う．システム (1) のような線形時不変システムに対して以下の結果がある．

補題 2　システム (1) が $\gamma>0$ の H_2 ノルムをもつ十分条件は (24) 式を満たす $X>0$ が存在することである [7].

$$\begin{aligned}&\mathcal{H}=\min\ \gamma\\ &\left\{\begin{array}{l} A(\mathbf{q}^n)X+XA^T(\mathbf{q}^n)+BB^T<0\\ \mathrm{tr}(CXC^T)<\gamma^2\end{array}\right.\end{aligned} \quad (24)$$

(24) 式の解析条件より, 従来法, 提案法のための解析条件として (25) 式の条件を得る．ただし, $i=1$ の条件が従

来法, $i=2$ の条件が提案法である.

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}_i = \min\ \gamma_i \quad (i=1,2)\\
&\begin{cases} \hat{A}_i(\mathbf{q})\hat{X}_i + \hat{X}_i^T\hat{A}_i^T(\mathbf{q}) + \hat{B}\hat{B}^T < 0 \\ \mathrm{tr}(CXC^T) < \gamma_i^2 \end{cases} \qquad (25)\\
&\hat{A}_1(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_\delta & B_\delta\Delta(\mathbf{q}) \\ C_\delta & -I + D_\delta\Delta(\mathbf{q}) \end{bmatrix}\\
&\hat{A}_2(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_0 & B_\delta\Delta_b(\mathbf{q}) \\ C_{\delta_1} + \Delta_c(\mathbf{q})C_{\delta_2} & -I \end{bmatrix}\\
&\hat{X}_1 = \begin{bmatrix} X & 0 \\ \hat{X}_{21} & \hat{X}_{22} \end{bmatrix},\ \hat{X}_2 = \begin{bmatrix} X & 0 \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix},\ X > 0\\
&\hat{B} = \begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix}^T
\end{aligned}
$$

(25) 式の解析条件を用いてロバスト H_2 性能解析を行う.

提案手法の有効性を示すために, 2 輪型倒立振子の数値例を用いる. 従来法, 提案法それぞれに対して, (25) 式の解析条件を用いロバスト H_2 性能解析を行った. 算出結果を表 1 に示す.

表 1 算出結果

手法	H_2 ノルム	次元	算出時間
従来法	3.84	11	340.6 sec
従来法 ($X_{23}=0$)	3.84	11	479.2 sec
提案法	3.58	8	67.9 sec

前節の証明からも分かるように, $\mathcal{H}_1 \geq \mathcal{H}_2$ という結果が得られた. また, 従来法に $X_{23}=0$ と制約を与えても, 算出結果にあまり影響は見られなかった.

この結果から, 本論文で提案するディスクリプタ変数を用いた取り出し方は, 従来より広く知られた LFT 形式を用いた取り出し方に $X_{23}=0$ と制約を与えた場合より, 保守性の低い結果を与えるといえる.

4 最大次数が n 次の場合

システム (1) について考える. 冗長なディスクリプタ変数を用い, 多項式の形で不確かさを含む $A(\mathbf{q}^n)$ に対して不確かさを 1 次の形で取り出す. 最大次数 n が奇数の場合, 偶数の場合と分けて考える. 提案法の手順を Fig.1 に示す. Fig.1 の手順を繰り返し行うことで, 不確かさに関して 1 次のシステムを得る. また, それらのシステムに関する 2 次安定判別条件を示す.

Fig.1 の手順を行う上での初期条件を $i=0$, $E_0 = I_m$, $A_0(\mathbf{q}^n) = A(\mathbf{q}^n)$, $x_0 = x$ とする.

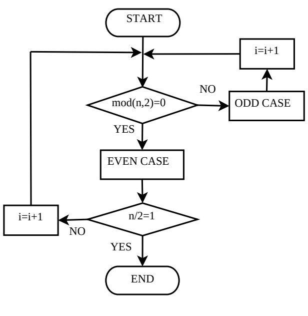

図 1 提案法の手順

[偶数次の場合]

$A_i(\mathbf{q}^n)$ を (26) 式と定義する.

$$
A_i(\mathbf{q}^n) = A_{\xi_i}(\mathbf{q}) + B_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}})C_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}}) \qquad (26)
$$

(26) 式を $E_i\dot{x}_i = A_i(\mathbf{q}^n)x_i$ に代入し変数 ξ_i を与えることで (27) 式 のように置き換えることができる.

$$
\Gamma_i : \begin{cases} E_i\dot{x}_i = & A_{\xi_i}(\mathbf{q})x_i + B_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}})\xi_i \\ \xi_i = & C_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}})x_i \end{cases} \qquad (27)
$$

システム Γ_i が 2 次安定であることと, $\dot{x} = A(\mathbf{q}^n)x$ が 2 次安定であることは等価である. システム (26) はディスクリプタ変数として, $x_{i+1} := [x_i^T\ \xi_i]^T$ を採用することでシステム (28) のように表すことができる.

$$
E_{i+1}\dot{x}_{i+1} = A_{i+1}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}})x_{i+1} \qquad (28)
$$

$$
E_{i+1} = \mathrm{diag}\,[E_i,\ \ 0] \qquad (29)
$$

$$
A_{i+1}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}}) = \begin{bmatrix} A_{\xi_i}(\mathbf{q}) & B_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}}) \\ C_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}}) & -I \end{bmatrix} \qquad (30)
$$

(29), (30) 式のように置くことで, $A_{i+1}(\mathbf{q}^{\frac{n}{2}})$ の最大次数は $n/2$ となる.

[奇数次の場合]

$A_i(\mathbf{q}^n)$ を (31) 式と定義する.

$$
A_i(\mathbf{q}^n) = A_{\xi_i}(\mathbf{q}) + B_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n+1}{2}})C_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n-1}{2}}) \qquad (31)
$$

(31) 式を $E_i\dot{x}_i = A_i(\mathbf{q}^n)x_i$ に代入し変数 ξ_i を与えることで (32) 式 のように置き換えることができる

$$
\Gamma_i : \begin{cases} E_i\dot{x}_i = & A_{\xi_i}(\mathbf{q})x_i + B_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n+1}{2}})\xi_i \\ \xi_i = & C_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n-1}{2}})x_i \end{cases} \qquad (32)
$$

システム Γ_i が 2 次安定であることと, $\dot{x} = A(\mathbf{q}^n)x$ が 2 次安定であることは等価である. システム (32) はディスクリプタ変数として, $x_{i+1} := [x_i^T\ \xi_i]^T$ を採用することでシステム (33) のように表すことができる.

$$
E_{i+1}\dot{x}_{i+1} = A_{\xi_{i+1}}(\mathbf{q}^{\frac{n+1}{2}})x_{i+1} \qquad (33)
$$

$$
E_{i+1} = \mathrm{diag}\,[E_i,\ \ 0] \qquad (34)
$$

$$
A_{i+1}(\mathbf{q}^{\frac{n+1}{2}}) = \begin{bmatrix} A_{\xi_i}(\mathbf{q}) & B_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n+1}{2}}) \\ C_{\xi_i}(\mathbf{q}^{\frac{n-1}{2}}) & -I \end{bmatrix} \qquad (35)
$$

(34), (35) 式のように置くことで, $A_{i+1}(\mathbf{q}^{\frac{n+1}{2}})$ の最大次数は $(n+1)/2$ となる.

定理 2 Fig.1 の手順を行うことで導かれるシステム Γ_i が 2 次安定であるための十分条件は (36) 式を満たす $S > 0$, S_{21_i}, S_{22_i} が存在することである.

$$
\mathrm{He}\left\{ \begin{bmatrix} A_{\xi_i}(\mathbf{q}) & B_{\xi_i}(\mathbf{q}) \\ C_{\xi_i}(\mathbf{q}) & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ S_{21_i} & S_{22_i} \end{bmatrix} \right\} < 0 \quad (36)
$$

$$
S_{i+1} = \begin{bmatrix} S_i & 0 \\ S_{21_i} & S_{22_i} \end{bmatrix},\ \ S_0 = S \qquad (37)
$$

(36) 式は不確かさに関して 1 次の形で表現されている. (36) 式は各不確かさパラメータがとる値の端点の LMI を連立して解くことで 2 次安定化をはかることができる.

5 比較

従来法, 提案法を用いることで導かれるシステムの次元について定式化を行う.

行列 $A(\mathbf{q}^n) \in \mathbf{R}^{m\times m}$ に対して, LFT 表現を導入することで得られる最小のシステムの次元は (38) 式と定式化できる [4].

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{dig}(a_{i,j})) + m - \rho \tag{38}$$

$$\rho = \sum_{l=1}^{m}\left[\mu_l(\sharp\mu_l - 1) + \nu_l(\sharp\nu_l - 1)\right] \tag{39}$$

ここで, μ_l は行列 $A(\mathbf{q}^n)$ の l 行目に存在する重複している不確かさの次数, $\sharp\mu_l$ は l 行目に存在する重複をもつ要素の数である. 重複をもたない場合 $\sharp\mu_l = 1$ とする. ν_l は行列 $A(\mathbf{q}^n)$ の l 列目に存在する重複している不確かさの次数, $\sharp\nu_l$ は l 列目に存在する重複をもつ要素の数である. 重複をもたない場合 $\sharp\nu_l = 1$ とする.

提案法を導入することで得られるシステムの次元について定式化を行う. 行列 $A(\mathbf{q}^n)$ を (40) 式と定義する.

$$A(\mathbf{q}^n) = A_\xi(\mathbf{q}) + \bar{A}^{(e)}(\mathbf{q}^n) + \bar{A}^{(o)}(\mathbf{q}^n) \tag{40}$$

ここで, 行列 $A_\xi(\mathbf{q})$ は不確かさに関して 1 次以下の項を取り出した行列, 行列 $\bar{A}^{(e)}(\mathbf{q}^n)$ は不確かさに関して偶数次の項のみ取り出した行列, 行列 $\bar{A}^{(o)}(\mathbf{q}^n)$ は不確かさに関して奇数次の項のみ取り出した行列とする. 提案法を導入することで, システムの次元は不確かさに関して偶数次の項 1 つにつき $\mathrm{dig}(\bar{a}^{(e)})/2$ 次, 奇数次の項 1 つにつき $(\mathrm{dig}(\bar{a}^{(o)})+1)/2$ 次拡張される. 提案法を導入することで得られる最小のシステムの次元は (41) 式と定式化できる.

$$\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(e)}) + \mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(o)})) + \sharp o\right] + m - \bar{\rho} \tag{41}$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}^{(e)} + \bar{\rho}^{(o)} \tag{42}$$

$$\bar{\rho}^{(e)} = \sum_{l=1}^{m}\left[\frac{\bar{\mu}_l^{(e)}}{2}(\sharp\bar{\mu}_l^{(e)} - 1) + \frac{\bar{\nu}_l^{(e)}}{2}(\sharp\bar{\nu}_l^{(e)} - 1)\right]$$

$$\bar{\rho}^{(o)} = \sum_{l=1}^{m}\left[\frac{\bar{\mu}_l^{(o)}+1}{2}(\sharp\bar{\mu}_l^{(o)} - 1) + \frac{\bar{\nu}_l^{(o)}+1}{2}(\sharp\bar{\nu}_l^{(o)} - 1)\right]$$

ここで, $\sharp o$ は行列 $\bar{A}(\mathbf{q}^n)$ の不確かさに関して奇数次の項を持つ要素の数 $\bar{\mu}_l^{(e)}$ は行列 $\bar{A}(\mathbf{q}^n)$ の l 行目に存在する偶数次で重複している不確かさの次数, $\bar{\mu}_l^{(o)}$ は l 行目に存在する奇数次で重複している不確かさの次数, $\sharp\bar{\mu}_l^{(e)}$ は l 行目に存在する偶数次で重複をもつ要素の数である. $\sharp\bar{\mu}_l^{(o)}$ は l 行目に存在する奇数次で重複をもつ要素の数である. 重複をもたない場合 $\sharp\bar{\mu}_l^{(e)} = 1$, $\sharp\bar{\mu}_l^{(o)} = 1$ とする. $\bar{\nu}_l^{(e)}$ は行列 $\bar{A}(\mathbf{q}^n)$ の l 列目に存在する偶数次で重複している不確かさの次数, $\bar{\nu}_l^{(o)}$ は l 列目に存在する奇数次で重複している不確かさの次数, $\sharp\bar{\nu}_l^{(e)}$ は l 列目に存在する偶数次で重複をもつ要素の数である. $\sharp\bar{\nu}_l^{(o)}$ は l 列目に存在する奇数次で重複をもつ要素の数である. 重複をもたない場合 $\sharp\bar{\nu}_l^{(e)} = 1$, $\sharp\bar{\nu}_l^{(o)} = 1$ とする. 提案法を導入することにより拡張される次元が, 従来法を導入することにより拡張される次元より, 必ず大きくならないことを示す. (40) 式の関係から (43) 式の関係が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{dig}(a_{i,j}) - \rho \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(e)}) + \mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(o)})\right] - \bar{\rho} \tag{43}$$

不確かさに関して奇数次の項のみ取り出した行列 $\bar{A}^{(o)}(\mathbf{q}^n)$ の次数の和は, 奇数次の項を持つ要素の数 $\sharp o$ 以上となることから (44) 式の関係が成り立つ.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(o)}) > \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(o)}) + \frac{1}{2}\sharp o \tag{44}$$

(43) 式の第 2 項を (44) 式で置き換える. 最終的に (45) 式の関係式を得る.

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{dig}(a_{i,j}) + m - \rho \\ &\geq \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(\mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(e)}) + \mathrm{dig}(\bar{a}_{i,j}^{(o)})) + \sharp o\right] + m - \bar{\rho}\end{aligned} \tag{45}$$

(45) 式の結果から (41) 式が (38) 式と同等または, より小さいことがわかる. したがって, 提案法を導入することにより拡張される次元は, 従来法を導入することにより拡張される次元と同等または, より小さくなる.

6 おわりに

不確かさを多項式の形で含む線形時不変システムについて考えた. 従来法と同等または, より小さい拡張で不確かさに関して 1 次の形へ変換できる手法を提案した. ディスクリプタ変数を用いることで, 従来から広く知られている LFT 形式を用いた手法にある制約を与えた条件よりも, 保守性の少ない 2 次安定判別条件を提案した.

参考文献

[1] 増淵, 示村： ゲインスケジューリング系の設計におけるディスクリプタ形式の利用について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 12, No. 7, pp. 390-394, 1999.

[2] 川田, 蛯原, 陳： H_∞ 状態フィードバック設計のための冗長なディスクリプタアプローチ - 伸縮型 LMI に基づく既存結果の拡張; 計測自動制御学会論文集, Vol. 42, No. 7, pp. 750-757, 2006.

[3] I. Masubuchi, T. Akiyama and M. Saeki: *Synthesis of Output Feedback Gain-Scheduling Controllers Based on Descriptor LPV System Representation*; 42nd IEEE Conference on Decision and Control, pp. 6115-6120, 2003.

[4] Juan C. Cockbourn: *Linear Fractional Representations of Uncertain Systems*; Automatica, Vol. 33, No. 7, pp. 1263-1271, 1997.

[5] 陳, 柴田： ディスクリプタ表現の冗長性を利用したシステム解析; システム制御情報学会論文誌, Vol. 47, No. 5, pp. 211-216, 2003.

[6] G. Chen, T. Sugie, T. Fujinaka and H. Shibata: *Mixed-μ Analysis for Dynamical System using Descriptor Form*; 1999 American Control Conference, pp. 1314-1318, 1999.

[7] D. Peaucelle, and D. Arzelier: *New LMI-based conditions for robust H_2 performance analysis*; 2000 American Control Conference, pp. 317-321, 2000.