多次元数値積分法の精度保証と応用

M2011MM018 菱田恵介
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

筧 [2] は多次元正規密度関数の区間領域における精度保証付き数値積分法について研究し，その中で Gauss-Legendre 積分則およびその直積型公式の理論誤差解析を行った．本論文では Gauss-Legendre 積分則およびその直積型公式の丸め誤差解析を行い，筧 [2] のアルゴリズムを C 言語で実現した．

また数値実験によりその有効性を検証した．

2　1 次元正規分布におけるアルゴリズム

1 次元正規分布 $N(\mu,\sigma)$ における確率

$$P(X\in[a,b])=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_a^b e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{1}$$

の下界 $\underline{P}$ と上界 $\overline{P}$ を計算する．

$$\underline{P}\le P(X\in[a,b])\le\overline{P}, \tag{2}$$

$$\overline{P}-\underline{P}\le 2\times10^{-10} \tag{3}$$

を満たすものを計算する．積分は Gauss-Legendre35 点則を用いる．Gauss-Legendre35 点則による (1) の近似積分を $P_{35}(a\le X\le b)$ と書くと，筧 [2] は次の不等式を得た．

$$|P(X\in[a,b])-P_{35}(X\in[a',b'])|\le 9.53\times10^{-11}, \tag{4}$$

$$a^{'}=\min\{\mu-7\sigma,a\},\quad b^{'}=\max\{\mu+7\sigma,b\}. \tag{5}$$

2.1　Gauss-Legendre 公式の区間化

Mathmeticia によって Gauss-Legendre 公式の標本点と重みの区間データ $[x_i^{(n)}]=[\triangledown x_i^{(n)},\vartriangle x_i^{(n)}],[w_i^{(n)}]=[\triangledown w_i^{(n)},\vartriangle w_i^{(n)}]$ を作成した．ここで，$\triangledown$ は倍精度実数への丸め下げ，$\vartriangle$ は丸め上げである．C 言語では区間演算のプログラムを用いて Gauss-Legendre 積分則の精度保証プログラムを作成した．

2.2　区間指数関数の作成

正規分布の密度関数を区間化 Gauss-Legendre 則で積分するには区間指数関数が必要である．指数関数を

$$e^x=2^u,\quad u=x\log_2 e \tag{6}$$

で表し，2^x の上界関数 $\overline{g}(x)$ と下界関数 $\underline{g}(x)$ を作成すると

$$\underline{g}(\alpha x)\le e^x\le\overline{g}(\alpha x)\quad(\alpha=\log_2 e) \tag{7}$$

である．

x の整数部を n，小数部を y，$x=n+y(0\le y<1)$ とする．さらに $z=y-1/2$ とすれば

$$2^x=2^{n+y}=2^n\sqrt{2}\,2^z \tag{8}$$

となる．そこで

$$\underline{p}(x)\le 2^x\le\overline{p}(x)\quad(-\frac{1}{2}\le x\le\frac{1}{2}) \tag{9}$$

を満たす多項式 $\underline{p}(x)$,$\overline{p}(x)$ を設計する．構成には Taylor の定理

$$2^x=\sum_{k=0}^{n-1}c_kx^k+c_n2^{\theta x}x^n\quad(0<\theta<1) \tag{10}$$

を用いる．ここで $c_k=(\log 2)^k/k!\quad(k>0)$ である．

$$\underline{c}_k=\triangledown c_k,\overline{c}_k=\vartriangle c_k(k\ge0) \tag{11}$$

とする．

2.2.1　近似多項式の構成

(1) $0\le x\le 1/2$ のとき (10) よりただちに下界関数

$$\underline{p}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\underline{c}_kx^k\le\sum_{k=0}^{n-1}c_kx^k<2^x \tag{12}$$

を得る．また $\theta x<1/2$ だから上界関数

$$\overline{p}(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\overline{c}_k+\overline{\sqrt{2}c}_nx^n>2^x \tag{13}$$

を得る．$\overline{\sqrt{2}c}_n=\vartriangle(\sqrt{2}c_n)$ である．

(2) $-1/2\le x<0$ のとき $y=-x$ とおくと

$$2^x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kc_ky^k \tag{14}$$

は交代級数で，c_ky^k は正項単調減少列である．ゆえに

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}c_kx^k \tag{15}$$

と置くと，交代級数の定理より

$$p_{2m}(x)\ge 2^x\ge p_{2m-1}(x) \tag{16}$$

ここで

$$2^x=\sum_{k=0}^{\infty}d_ky^k,\quad d_k=(-1)^kc_k \tag{17}$$

と置き，2^x の下界関数

$$\underline{p}(x)=\underline{q}(y)=\sum_{k=0}^{2m-1}\underline{d}_ky^k\le\sum_{k=0}^{2m-1}d_ky^k<2^x \tag{18}$$

を得る．また上界関数

$$\overline{p}(x) = \overline{q}(y) \geq \sum_{k=0}^{2m} \overline{d}_k y^k \geq \sum_{k=0}^{2m-1} d_k y^k > 2^x \tag{19}$$

を得る．

(1) では $n = 13$，(2) では $m = 7$ として，数値実験により $\underline{p}$ および $\overline{p}$ の 2^x に対する絶対誤差は 10^{-16} 以下であることをを確認した．

(3) 多項式 $p(x)$ $(x \geq 0)$ の精度保証付き計算

n 次多項式

$$y = p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k} \tag{20}$$

はネスティングアルゴリズム

$$y_0 = a_0, \tag{21}$$

$$y_k = y_{k-1}x + a_k, (k = 1, 2, \cdots, n) \tag{22}$$

で計算される．$y = y_n$ である．これを丸め上げモードで計算したもの $\underline{y} = fl_{\bigtriangledown}[p(x)]$ と書くと，$x \geq 0$ なら

$$fl_{\bigtriangledown}[p(x)] \leq p(x) \tag{23}$$

が証明できる．同じく，y を丸め下げモードで計算したものを $fl_{\triangle}[p(x)]$ と書くと，$x \geq 0$ なら

$$fl_{\triangle}[p(x)] \leq p(x) \tag{24}$$

である．これにより，$2^x(-1/2 \leq x < 1/2)$ が

$$fl_{\bigtriangledown}[\underline{p}(x)] \leq 2^x \leq fl_{\triangle}[\overline{p}(x)](x \geq 0) \tag{25}$$

$$fl_{\bigtriangledown}[\underline{q}(x)] \leq 2^x \leq fl_{\triangle}[\overline{q}(x)], t = -x(x \leq 0) \tag{26}$$

で包囲される．

この方法は，計算途中で丸めモードの変更を必要としないので効率的である．

2.2.2 アルゴリズム

筧 [2] の議論を詳しくたどると，

$$|P(a \leq X \leq b) - P(a' \leq X \leq b')| \leq 5.3 \times 10^{-12} \tag{27}$$

ゆえに a', b' を区間計算したものを $[a'], [b']$ とすると

$$|P(a \leq X \leq b) - P(\underline{a}' \leq X \leq \overline{b}')| \leq 5.3 \times 10^{-12} \tag{28}$$

また

$$|\underline{a}' - \mu| \leq 7.04\sigma, \quad \overline{b}' - \mu \ \leq 7.04\sigma \tag{29}$$

なら

$$|P(\underline{a}' \leq X \leq \overline{b}') - Q_n(\underline{a}', \overline{b}')| \leq 9 \times 10^{-11}. \tag{30}$$

ゆえに $Q_n(\underline{a}', \overline{b}')$ を区間計算したものを $[Q_n]$ と書けば

$$\underline{Q}_n \leq Q_n(\underline{a}', \overline{b}') \leq \overline{Q}_n. \tag{31}$$

これより，

$$\underline{Q}_n - 9.53 \times 10^{-11} \leq P(a \leq X \leq b) \leq \overline{Q}_n + 9.53 \times 10^{-11} \tag{32}$$

を得る．$\overline{Q}_n - \underline{Q}_n$ は丸め誤差と区間指数関数の誤差 (区間幅) に影響されるが通常 10^{-10} に比べてきわめて小さいので，目標は充分達成できると考える．

(29) の条件に反するのは σ に対して $|\mu|$ が極端に大きいときのみである．したがって極端場合を除き (32) で目標が達せられる．//

3 多次元正規分布におけるアルゴリズム開発

3.1 丸め誤差解析

3.1.1 線形計算の事前誤差評価

IEEE754 倍精度計算による線形計算の事前誤差評価を行う．IEEE754 倍精度の正規数と 0 を合わせた集合を $\mathbb{F}$ と書く．ある計算式を丸め込みモードで倍精度計算した結果を fl[計算式] と書く．

[定理 3.1]（内積）ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i), \boldsymbol{y} = (y_i) \in \mathbb{F}$ の内積計算を $q = \boldsymbol{x}^T$ とし，$\tilde{q} = fl[\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{y}]$ とすると，

$$|\Delta q| = |\tilde{q} - q| \leq |\boldsymbol{x}|^T |\boldsymbol{y}| \gamma_n, \tag{33}$$

$$\gamma_n \equiv \frac{nu}{1 - nu}, u = 2^{-53} \tag{34}$$

である．u は丸め誤差単位と呼ばれる．//

[定理 3.2]（行列ベクトル積）行列 $A = (a_{ij}) \in \mathbb{F}^{m \times n}$ とベクトル $\boldsymbol{x} = (x_i) \in \mathbb{F}^n$ の積を $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ とし，$\tilde{y} = fl[A\boldsymbol{x}]$ とすると，

$$\|\Delta \boldsymbol{y}\|_\infty = \|\tilde{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{y}\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|y\|_\infty \gamma_n.// \tag{35}$$

[定理 3.3] 対称行列 A と A^+ について，$R = A^+A - I$ が $\|R\| < 1$ を満たすなら，A は正則であり，

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{\|A^+\|}{1 - \|R\|} \tag{36}$$

また，A^+ の逆行列 A^{-1} との誤差 $\Delta A = A^+ - A^{-1}$ の ∞-ノルムは

$$\|\Delta A\|_\infty \leq \frac{\|A^+\|_\infty \|R\|_\infty}{1 - \|R\|_\infty} \tag{37}$$

で評価される．//

分散共分散行列 $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{F}^{s \times s}$ は正値対称行列ゆえ，その近似逆行列 $\Sigma^+ \in \mathbb{F}^{s \times s}$ を Cholesky 分解で求めることができる．計算量は $5s^3/6$flops である．

3.1.2 数値積分の丸め誤差

平均 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_s)^T \in \mathbb{F}^s$，分散共分散行列 $\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{F}^{s \times s}$ の s 次元正規分布の密度関数を

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{s}{2}} (\det \Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu})) \tag{38}$$

とする．$a_k, b_k \in \mathbb{F}$ $(1 \le k \le s)$ について，s 次元長方形領域を $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_s, b_s]$ とし，D 上の積分

$$P(X \in D) = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_s}^{b_s} \varphi(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s \tag{39}$$

を $N = \prod_{k=1}^{s} n_k$ 点直積型 Gauss-Legendre 公式で近似積分した結果 $P_N(\boldsymbol{X} \in D)$ は以下のように計算される．$x_i^{(k)}, w_i^{(k)} (1 \le i \le n_k)$ は区間 [-1,1] 上の n_k 点 Gauss-Legendre 公式の標本点と重みとする．$\boldsymbol{a} = (a_k), \boldsymbol{b} = (b_k)$ とし，

$$\boldsymbol{o} = (o_k) = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} - \boldsymbol{\mu}, \tag{40}$$

$$\boldsymbol{r} = (r_k) = \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2}. \tag{41}$$

$\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \cdots, i_s)$ $(1 \le i_k \le n_k, 1 \le k \le s)$ として $\boldsymbol{x_i} = (x_{i_k})$ とし，

$$\boldsymbol{y_i} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{r} * \boldsymbol{x_i}, \tag{42}$$

$$q_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{y_i}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{y_i}, \tag{43}$$

$$e_{\boldsymbol{i}} = \exp(-\frac{1}{2} q_{\boldsymbol{i}}). \tag{44}$$

ここで $*$ はベクトル成分毎の積である．次に

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{s/2} (\det \Sigma)^{1/2}}, \tag{45}$$

$$r = \prod_{k=1}^{s} r_k \tag{46}$$

そして

$$P_N(\boldsymbol{X} \in D) = Ar \sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^{(1)} \cdots \sum_{i_s=1}^{n_s} w_{i_s}^{(s)} e_{\boldsymbol{i}} \tag{47}$$

式 (47) の右辺を IEEE754 倍精度で計算したときの丸め誤差の事前誤差解析を行う．丸め誤差の影響を受けた倍精度実数をチルダーを付けて表す．

(1)Gauss-Legendre 公式の標本点と重みは，多倍長計算したものを倍精度に丸め込んで用いるので，

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i^{(k)} = x_i^{(k)}(1+\epsilon), \tilde{w}_i^{(k)} = w_i^{(k)}(1+\epsilon), \\ |\epsilon| \le u \quad (1 \le i \le n_k, 1 \le k \le s) \end{aligned} \tag{48}$$

(2) $\tilde{y}_i^{(k)} (1 \le i \le n_k, 1 \le k \le s)$ の誤差．ある計算式を倍精度計算した結果を fl[計算式] と書く．

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} = fl[\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} - \boldsymbol{\mu} + \frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}}{2} \tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{i}}] \tag{49}$$

とすると事前誤差解析により

$$\|\Delta \boldsymbol{y}_i\|_\infty \equiv \|\tilde{\boldsymbol{y}}_i - \boldsymbol{y}_i\|_\infty \le D_\infty \tag{50}$$

$$D_\infty \equiv \gamma_4 \max_{1 \le k \le s} \{|\mu_k| + \max\{|a_k|, |b_k|\}\} \tag{51}$$

を得る．

(3) $\tilde{q}_{\boldsymbol{i}}, \boldsymbol{i} = (i_k)(1 \le i_k \le n_k, 1 \le k \le s)$ の誤差．

計算式を

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{i}} = fl[\tilde{\boldsymbol{y}}^T \tilde{\boldsymbol{z}}_{\boldsymbol{i}}] = fl[\Sigma^+ \tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}], \tilde{q}_{\boldsymbol{i}} \tag{52}$$

とする．誤差は,

$$\begin{aligned} |\Delta q_{\boldsymbol{i}}| = |\tilde{q}_{\boldsymbol{i}} - q_{\boldsymbol{i}}| &\le |fl[\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} \tilde{\boldsymbol{z}}]_{\boldsymbol{i}} - \tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}^T \Sigma^+ \tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}| \\ &+ |\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}^T \Sigma^+ \tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}| \\ &= |\Delta \tilde{q}_{\boldsymbol{i}}| + |\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}^T \Sigma^+ \tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}| \end{aligned} \tag{53}$$

である．

まず $|\Delta \tilde{q}_{\boldsymbol{i}}|$ を事前誤差評価すると

$$|\Delta \tilde{q}_{\boldsymbol{i}}| \le \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Sigma^+\|_\infty \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty (2+\gamma_s)\gamma_s \tag{54}$$

を得る．次に

$$\begin{aligned} &|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}^T \Sigma^+ \tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}^T \Sigma^{-1} \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}| \\ &\le \|\Delta \tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Sigma^+\|_\infty \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty \\ &+ \|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Delta \Sigma^+\|_\infty \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty \\ &+ \|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Sigma^{-1}\|_\infty \|\Delta \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty. \end{aligned} \tag{55}$$

ゆえに,

$$\begin{aligned} |\Delta \tilde{q}_{\boldsymbol{i}}| \le \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Sigma^+\|_\infty \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty (2+\gamma_s)\gamma_s \\ + \|\Delta \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Sigma^+\|_\infty \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty \\ + \|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Delta \Sigma^+\|_\infty \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty \\ + \|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \|\Sigma^+\|_\infty \|\Delta \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty. \end{aligned} \tag{56}$$

右辺各項の因子は次のように評価される．まず，$a_k - \mu_k \le y_{\boldsymbol{i}}^{(k)} \le b_k - \mu_k$ より，$|y_{\boldsymbol{i}}^{(k)}| < \max\{|a_k - \mu_k|, |b_k - \mu_k|\}$ ゆえ,

$$\|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty \le M_\infty \equiv \max_{1 \le k \le s} \max\{|a_k - \mu_k|, |b_k - \mu_k|\}, \tag{57}$$

$$\|\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \le M_1 \equiv \sum_{k=1}^{s} \max\{|a_k - \mu_k|, |b_k - \mu_k|\}. \tag{58}$$

これと (50) より,

$$\|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_\infty \le \tilde{M}_\infty = M_\infty + D_\infty. \tag{59}$$

同様にして,

$$\|\Delta \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \equiv \|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}} - \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \le D_1 \tag{60}$$

$$D_1 \equiv \gamma_4 \sum_{k=1}^{s} (|\mu_k| + \max\{|a_k|, |b_k|\}) \tag{61}$$

ゆえ,

$$\|\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{i}}\|_1 \le \tilde{M}_1 = M_1 + D_1. \tag{62}$$

を得る．また,

$$\tilde{N}_\infty = \|\Sigma^+\|_\infty \tag{63}$$

は計算可能であり，(50) より

$$\|\Sigma^{-1}\|_\infty \le N_\infty \equiv \frac{\tilde{N}_\infty}{1-\|R\|_\infty}, R = \Sigma^+\Sigma - I \tag{64}$$

そして定理 3.3 により，

$$\|\Sigma^+\|_\infty \le B_\infty \equiv N_\infty \|R\|_\infty \tag{65}$$

である．以上より，

$$\begin{aligned}|\Delta q_i| \le C_q \equiv \tilde{M}_1\tilde{N}_\infty\tilde{M}_\infty(2+\gamma_s)\gamma_s \\ +D_1\tilde{N}_\infty\tilde{M}_\infty \\ +M_1B_\infty\tilde{M}_\infty \\ +M_1N_\infty D_\infty.\end{aligned} \tag{66}$$

(4) $\tilde{e}_{\boldsymbol{i}} = \exp(-\tilde{q}_i/2)$, $\boldsymbol{i} = (i_k)$ $(1 \le i_k \le n_k, 1 \le k \le s)$ の誤差

$$\tilde{e}_{\boldsymbol{i}} = \exp\left(-\frac{1}{2}(q_{\boldsymbol{i}} + \Delta q_{\boldsymbol{i}})\right) = e_{\boldsymbol{i}} \exp\left(-\frac{1}{2}\Delta q_{\boldsymbol{i}}\right) \tag{67}$$

ゆえ (66) より，

$$\tilde{e}_{\boldsymbol{i}} \exp\left(-\frac{1}{2}C_q\right) \le e_{\boldsymbol{i}} \le \tilde{e}_{\boldsymbol{i}} \exp\left(\frac{1}{2}C_q\right). \tag{68}$$

よって，

$$\hat{Q} = Ar\sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^1 \cdots \sum_{i_s=1}^{n_s} w_{i_s}^s \tilde{e}_{\boldsymbol{i}} \tag{69}$$

と置くと，

$$\hat{Q}\exp\left(-\frac{1}{2}C_q\right) \le P_N(X \in D) \le \hat{Q}\exp\left(\frac{1}{2}C_q\right) \tag{70}$$

となる．

(5) 総和の誤差

$$\tilde{Q} = fl[Ar\sum_{i_1=1}^{n_1} w_{i_1}^{(1)} \cdots \sum_{i_s=1}^{n_s} w_{i_s}^{(s)} \tilde{e}_{\boldsymbol{i}}] \tag{71}$$

とすると

$$\hat{Q}(1-u)^K \le \tilde{Q} \le \hat{Q}(1+u)^K, \tag{72}$$

$$K = 3s + 2 + \sum_{k=1}^{s} n_k \tag{73}$$

よって，

$$\begin{aligned}\rho_L\tilde{Q} \le P_N(X \in D) \le \rho_U\tilde{Q}, \\ \rho_L = \exp\left(-\frac{1}{2}C_q\right)(1+u)^{-K},\end{aligned} \tag{74}$$

$$\rho_U = \exp\left(\frac{1}{2}C_q\right)(1-u)^{-K} \tag{75}$$

を得る．

(6) 近似指数関数の影響 $\tilde{Q}$ の指数関数を下界指数関数で置き換えて計算したものを $\tilde{Q}_L$，上界指数関数で置き換えて計算したものを $\tilde{Q}_U$ とおくと明らかに

$$\tilde{Q}_L \le \tilde{Q} \le \tilde{Q}_U. \tag{76}$$

以上より，

$$\rho_L\tilde{Q}_L \le P_N(X \in D) \le \rho_U\tilde{Q}_U \tag{77}$$

を得る．これが結論である．

3.2 打切り誤差解析

[定理 3.4] $d_k = b_k - a_k$ $(1 \le k \le s)$ とすると，

$$|E_N\varphi| \le M_T \equiv A\prod_{k=1}^{s} d_k \sum_{k=1}^{s} \frac{M(n_k, a_k, b_k, \tau_{kk}/2)}{d_k} \tag{78}$$

この定理と，

$$\rho_L\tilde{Q}_L \le P_N(X \in D) \le \rho_U\tilde{Q}_U \tag{79}$$

および，

$$E_N\varphi = Q_N\varphi - I\varphi = P_N(X \in D) - P(X \in D) \tag{80}$$

より，$P(X \in D)$ の包囲

$$\rho_L\tilde{Q}_L - M_T \le P(X \in D) \le \rho_U\tilde{Q}_U + M_T \tag{81}$$

が得られる．これが，多次元正規分布の確率計算における本論文の結論である．

4 おわりに

本研究では，S 次元正規分布 $N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ に従う確率変数 $\boldsymbol{X}$ に関する確率を区間包囲する計算法を提案した．この方法は D 上の確率密度関数の積分を直積型 Gauss-Legendre 則で近似し，それを精度保証するものである．

1 次元問題に関しては任意の問題について，包囲区間幅 w が $w \le 2 \times 10^{-10}$ を満たすアルゴリズムを提案した．1 次元アルゴリズムと 2 次元アルゴリズムの数値実験を行い，双方とも良好な結果を得た．

今後の課題としては，近似積分則のより精密な誤差評価や 3 次元以上の問題の研究などが挙げられる．

5 参考文献

[1] N.J.Higham：Accuracy and Stability of Numerical Algorithms(2nd ed.),SIAM(2002).

[2] 筧恵介：『多次元正規密度関数の区間領域における精度保証付き数値積分法』．南山大学数理情報研究科数理情報専攻修士論文 (2012).

[3] 筧恵介：『多次元正規密度関数の区間領域における精度保証付き数値積分法』．南山大学数理情報研究科数理情報専攻修士論文要旨集 (2012).