階層的線形モデル (HLM) の研究とその応用

M2011MM013 服部基紘

指導教員 松田眞一

1　はじめに

階層データとはそれぞれの観測値が何らかの上位の抽出単位に包含されているような階層的な構造を持っているデータである。心理学や教育および医学に関する研究で収集されるデータは，この階層データの構造をもっている場合が多い。

しかし，実際にはそれを効果的に分析するための階層的線形モデルに関する研究はまだ少なく，発展的な内容までの十分な議論はそれほどされていない。実用的な利用が出来るよう発展させるため，実際の観測値に対して階層的線形モデル適用し検討していくことは必要なことである。

そこで，階層的線形モデルの理論を調査し，その理論をおさえたうえで実際のデータに対しての事例研究を行っていく。事例研究の分析にはフリーの統計解析ソフト R を用いることにする。分析結果にもとづき，今後有効に階層データに対して分析が行えるようにすることを本研究の目的とする。

2　固定効果の推定

この章は Raudenbush & Bryk[1] を参照してまとめている。

2.1　変数定義

階級 $1(i = 1, \cdots, n_j)$ が階級 $2(j = 1, \cdots, J)$ の中に階層的に入っているとする。

Y_{ij} : 観測値
β_{0j} : 階級 1 の切片
β_{1j} : 階級 1 の傾き（ランダム効果）
X_{ij} : 階級 1 の予測因子
r_{ij} : 階級 1 のランダム効果
σ^2 : 階級 1 のランダム効果の分散
$\gamma_{00}, \cdots, \gamma_{11}$: 階級 2 の係数（固定効果）
W_j : 階級 2 の予測因子
u_{0j}, u_{1j} : 階級 2 のランダム効果
$\tau_{00}, \cdots, \tau_{11}$: 階級 2 のランダム効果の分散共分散

2.2　出力として平均をもつ回帰

2.2.1　点推定

階級 1 の平均が階級 2 の変数によって予測された分析を考えてみる。階級 1 のモデルは

$$\bar{Y}_{.j} = \beta_{0j} + \beta_{1j} X_{ij} + \bar{r}_{.j} \tag{1}$$

である。階級 2 のモデルは，予測因子 W_j を含むので

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} W_j + u_{0j} \tag{2}$$

となる。結果として，結合モデルは

$$\bar{Y}_{.j} = \gamma_{00} + \gamma_{01} W_j + u_{0j} + \bar{r}_{.j} \tag{3}$$

と表すことができる。W_j が与えられた $\bar{Y}_{.j}$ の分散は

$$\mathrm{Var}(\bar{Y}_{.j}) = \tau_{00} + V_j = \Delta_j \tag{4}$$

である。ここで，$V_j = \sigma^2 / n_j$ である。Δ_j は $\bar{Y}_{.j}$ の残差分散である。すなわち，条件付き分散は W_j により与えられる。u_{0j} と r_{ij} は独立で正規分布に従うと仮定する。

すべての集団の標本サイズが等しい場合，Δ_j は各群で同一であり，γ_{01} の同一で最小分散の不偏推定量は，通常の最小二乗推定量 (OLS) となる。

$$\tilde{\gamma}_{01} = \frac{\sum (W_j - \bar{W}_.)(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..})}{\sum (W_j - \bar{W}_.)^2} \tag{5}$$

ここで，

$$\bar{W}_. = \sum W_j / J, \tag{6}$$

$$\bar{Y}_{..} = \sum \bar{Y}_{.j} / J, \tag{7}$$

となる。γ_{00} の通常の最小二乗推定量は

$$\tilde{\gamma}_{00} = \bar{Y}_{..} - \tilde{\gamma}_{01} \bar{W}_. \tag{8}$$

である。

標本のサイズ n_j が等しくない場合，それでも，統計量 $Y_{.j}$ は不等分散 $\Delta_j = \tau_{00} + V_j$ をもつ。この場合，すべての Δ_j が既知であると仮定すると，γ_{01} の同一で最小分散，不偏推定量は加重最小二乗推定量である。それぞれの集団のデータはその精度 ${\Delta_j}^{-1}$ に比例して加重されている。

$$\hat{\gamma}_{01} = \frac{\sum {\Delta_j}^{-1} (W_j - \bar{W}_.^*)(\bar{Y}_{.j} - \bar{Y}_{..}^*)}{\sum {\Delta_j}^{-1} (W_j - \bar{W}_.^*)^2} \tag{9}$$

ここで，$\bar{W}_.^*$ と $\bar{Y}_{..}^*$ は精度の加重平均である。

$$\bar{W}_.^* = \sum {\Delta_j}^{-1} W_j / \sum {\Delta_j}^{-1} \tag{10}$$

$$\bar{Y}_{..}^* = \sum {\Delta_j}^{-1} \bar{Y}_{.j} / \sum {\Delta_j}^{-1} \tag{11}$$

γ_{00} の加重最小二乗推定量は

$$\hat{\gamma}_{00} = \bar{Y}_{..}^* - \hat{\gamma}_{01} \bar{W}_.^* \tag{12}$$

である。

2.2.2 区間推定

Δ_j が与えられた統計量 $\hat{\gamma}_{01}$ の標本分散は

$$\mathrm{Var}(\hat{\gamma}_{01}) = \left[\sum {\Delta_j}^{-1}(W_j - \bar{W}^*_.)^2\right]^{-1} \tag{13}$$

である。したがって，$\hat{\gamma}_{01}$ の 95% 信頼区間は

$$95\%\mathrm{CI}(\gamma_{01}) = \hat{\gamma}_{01} \pm 1.96[\mathrm{Var}(\hat{\gamma}_{01})]^{1/2} \tag{14}$$

によって与えられる。

2.3 より一般的なモデル

2.3.1 点推定

より一般的な場合に，これらの基本的な原則の拡張は容易である。Q 個の予測変数をもつ一般的な階級 1 のモデルは以下の行列表記で表される。

$$\boldsymbol{Y}_j = X_j\boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{r}_j, \tag{15}$$

$$\boldsymbol{r}_j \sim N(\boldsymbol{0}, \sigma^2 I) \tag{16}$$

ここで，$\boldsymbol{Y}_j$ は $n_j \times 1$ のベクトル，X_j は $n_j \times (Q+1)$ の予測変数行列，$\boldsymbol{\beta_j}$ は $((Q+1)\times 1)$ の未知のパラメータのベクトル，I は $n_j \times n_j$ の恒等行列，$\boldsymbol{r}_j$ は $n_j \times 1$ の平均ベクトルが 0，対角成分が σ^2，対角以外の成分が 0 の分散共分散行列をもつような正規分布に従うと仮定された変量誤差のベクトルである。

X_j のランクが $Q+1$ であると仮定すると，$\boldsymbol{\beta_j}$ の OLS 推定量は

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = (\boldsymbol{X}_j^T\boldsymbol{X}_j)^{-1}\boldsymbol{X}_j^T\boldsymbol{Y}_j \tag{17}$$

であり，その分散行列は

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j) = \boldsymbol{V}_j = \sigma^2(\boldsymbol{X}_j^T\boldsymbol{X}_j)^{-1} \tag{18}$$

によって与えられる。式 (15) を $(\boldsymbol{X}_j^T\boldsymbol{X}_j)^{-1}\boldsymbol{X}_j^T$ に 左から掛けると，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ に対するモデルを得る。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \boldsymbol{\beta}_j + \boldsymbol{e}_j, \qquad \boldsymbol{e}_j \sim N(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{V}_j) \tag{19}$$

ここで，$\boldsymbol{V}_j$ は $\boldsymbol{\beta}_j$ の推定量として $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ の誤差分散を意味するような誤差分散行列である。

階級 2 で $\boldsymbol{\beta}_j$ に対するより一般的なモデルは

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{u}_j, \qquad \boldsymbol{u}_j \sim N(\boldsymbol{0}, T) \tag{20}$$

である。ここで，$\boldsymbol{W}_j$ は $(Q+1)\times F$ の予測値の行列，$\boldsymbol{\gamma}$ は $F\times 1$ の固定効果ベクトル，$\boldsymbol{u}_j$ は $(Q+1)\times 1$ の階級 2 の誤差もしくは変量効果，T は予測値 $\boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\gamma}$ についての $\boldsymbol{\beta_j}$ の $(Q+1)\times(Q+1)$ 分散共分散行列である。

式 (20) を式 (19) に代入すると単一の結合モデルを得る。

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_j = \boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{e}_j \tag{21}$$

ここで，$\boldsymbol{W}_j$ が与えられた $\boldsymbol{\beta}_j$ のばらつきは，

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j) = \mathrm{Var}(\boldsymbol{u}_j + \boldsymbol{e}_j) = T + \boldsymbol{V}_j = \boldsymbol{\Delta}_j \tag{22}$$

となる。

各グループの観測数，予測子行列 X，および $\boldsymbol{\beta}_j$ のそれぞれの成分に対しての階級 2 の集合がすべて同じであるようなデータである場合，それぞれの $\hat{\boldsymbol{\beta}}_j$ は同じ分散 $\boldsymbol{\Delta}$ をもつ。ここで

$$\boldsymbol{\Delta} = T + \boldsymbol{V} = T + \sigma^2(X^TX)^{-1} \tag{23}$$

である。この場合，$\boldsymbol{\gamma}$ の同一で最小分散の不偏推定量は OLS の回帰推定量である。

$$\tilde{\gamma} = (\sum \boldsymbol{W}_j^T\boldsymbol{W}_j)^{-1}\sum \boldsymbol{W}_j^T\hat{\boldsymbol{\beta}}_j \tag{24}$$

しかし，データが完全にバランスが取れていないと考えると，$\boldsymbol{\Delta}_j$ の値は，グループ間で異なっており，それぞれの $\boldsymbol{\Delta}_j$ が知られていると仮定すると，$\boldsymbol{\gamma}$ の一意的で，最小分散，不偏推定量は，一般化最小二乗法（GLS）の推定量になる。

$$\tilde{\gamma} = (\sum \boldsymbol{W}_j^T\boldsymbol{\Delta}_j^{-1}\boldsymbol{W}_j)^{-1}\sum \boldsymbol{W}_j^T\boldsymbol{\Delta}_j^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}}_j \tag{25}$$

GLS 推定値はそれぞれのグループのデータをその精度行列によって加重をする，すなわち，$\boldsymbol{\Delta}_j^{-1}$ は分散共分散行列の逆行列である。この場合において，GLS の推定と加重最小二乗推定量 (9) の間には密接な関係がある。ここで，式 (16) と (20) の通常の仮定を考えると，式 (25) も，$\boldsymbol{\gamma}$ の最尤推定量であることに注意しなければならない。

2.3.2 区間推定

γ に対する信頼区間は，推定値の分散行列 $\boldsymbol{V}_{\hat{\gamma}}$ にもとづいている。ここで，

$$\boldsymbol{V}_{\hat{\gamma}} = \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = (\sum \boldsymbol{W}_j^T\boldsymbol{\Delta}_j^{-1}\boldsymbol{W}_j)^{-1} \tag{26}$$

例えば，特定の要素に対する 95% 信頼区間は

$$95\%\mathrm{CI}(\gamma_h) = \hat{\gamma}_h \pm 1.96(V_{hh})^{1/2} \tag{27}$$

となる。ここで，V_{hh} は $\boldsymbol{V}_{\hat{\gamma}}$ の h 番目の対角成分である。

3 仮説検定

この章は Raudenbush & Bryk[1] を参照してまとめている。

3.1 固定効果に対する仮説検定

モデル

$$\boldsymbol{\beta}_j = \boldsymbol{W}_j\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{u}_j$$

に対して，複合帰無仮説は

$$H_0 : \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$$

となる。ここで，

$$\boldsymbol{C}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，

$$\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_{01} \\ \gamma_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{28}$$

となる。

$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_j) = \boldsymbol{\Delta}_j$ が既知であるため，$\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ の標本分散は

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \left(\sum \boldsymbol{W}^T{}_j \boldsymbol{\Delta}^{-1}{}_j \boldsymbol{W}_j\right)^{-1} = \boldsymbol{V}_{\hat{\gamma}} \tag{29}$$

である。それゆえ，対比ベクトル（contrast vector）$\boldsymbol{C}^T\hat{\boldsymbol{\gamma}}$ は，分散

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{C}^T\hat{\boldsymbol{\gamma}}) = \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{V}_{\hat{\gamma}}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{V}_c \tag{30}$$

をもつ。$\boldsymbol{V}_{\hat{\gamma}}$ が未知であるが，

$$\hat{\boldsymbol{V}}_{\hat{\gamma}} = (\sum \boldsymbol{W}^T{}_j \hat{\boldsymbol{\Delta}}_j^{-1} \boldsymbol{W}_j)^{-1} \tag{31}$$

によって推定されている場合，帰無仮説 $H_0 : \boldsymbol{C}^T\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}$ に対する近似の検定統計量は，検定された対比の数（すなわち，$\boldsymbol{C}^T$ の行の数）に等しい自由度をもつような H_0 の下で，漸近的に χ^2 分布に従う

$$H = \hat{\boldsymbol{\gamma}}^T\boldsymbol{C}\hat{\boldsymbol{V}}_c^{-1}\boldsymbol{C}^T\hat{\boldsymbol{\gamma}} \tag{32}$$

により与えられる。

4　事例研究

4.1　HSB データの解析

4.1.1　データについて

HSB データ（奥村 [3] 参照）の各変数は以下のとおりである。ここで，変数名の前の数字はその変数の階級を表している。

- (1)MATHACH : 数学の成績
- (1)Socio-Economic Status(SES) : 家庭の社会経済的地位を表す尺度の得点
- (1)CSES : 社会経済的地位を表す尺度の得点の平均からの差異
- (2)SECTOR : カトリックか公立か
- (2)MEANSES : SES の学校平均

この HSB データに関して，MATHACH（生徒の数学の成績）が SES（生徒の家庭の社会経済的地位），および SECTOR（生徒が属する学校の区分），そして MEANSES（学校に通う生徒の平均的社会経済地位）からどのように説明することができるのかを階級 2 の階層的線形モデルによってモデル化し分析を行う。

4.1.2　モデルについて

階級 1 では，生徒の社会経済的地位（SES）を用いて数学の成績（MATHACT）を予測する回帰式を立てる。階級 1 の単位は生徒である。

$$MATHACT_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(SES_{ij} - S\bar{E}S_{.j}) + r_{ij} \tag{33}$$

$$= \beta_{0j} + \beta_{1j}(CSES_{ij}) + r_{ij} \tag{34}$$

階級 2 では，階級 1 の回帰式における学校ごとの切片と傾きを学校の区分（SECTOR）および学校の平均的な社会経済的地位（MEANSES）によって予測する回帰式を立てる。階級 2 の単位は学校である。

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}(SECTOR_j) + \gamma_{02}(MEANSES_j) + u_{0j} \tag{35}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + \gamma_{11}(SECTOR_j) + \gamma_{12}(MEANSES_j) + u_{1j} \tag{36}$$

4.1.3　解析結果

固定効果は表 1 のようになった。また，固定効果の 95% 信頼区間は表 2 のようになった。

表 1　固定効果:HSB データ

	Value	std.Error	t-value
(Intercept)	12.1279	0.1992	60.8541
sectorCathoric(γ_{01})	1.2265	0.3062	4.0047
meanses(γ_{02})	5.3328	0.3691	14.4454
cses(γ_{10})	2.9450	0.1555	18.9281
sectorCathoric:cses(γ_{11})	−1.6426	0.2397	−6.8512
meanses:cses(γ_{12})	1.0392	0.2988	3.4771

表 2　信頼区間:HSB データ

	下限	上限
(Intercept)	11.7373	12.5185
sectorCathoric(γ_{01})	0.6263	1.8269
meanses(γ_{02})	4.6093	6.0564
cses(γ_{10})	2.6401	3.2500
sectorCathoric:cses(γ_{11})	−2.1126	−1.1727
meanses:cses(γ_{12})	0.4534	1.6251

4.1.4　考察

結果より，それぞれの推定値の中で，MEANSES と CSES がほかの変数に比べて大きく反応している。そのため，階級 1 の変数については，CSES（社会経済的地位を表す尺度の得点の平均からの差異）が大きな値になるほどその生徒の MATHACT（数学の成績）は良くなると言える。言い換えれば，CSES が大きな正の値をとるのは生徒の SES（社会経済的地位）が平均よりも高い値であるときなので，これは生徒の社会経済的地位が高ければ数学の得点は高くなる傾向にあるということである。つまり，裕福な家庭の生徒は数学の成績が高く，反対に貧しい家庭の生徒は低くなる傾向にあるということがこのデータに関して言える。

また，MEANSES（SES の学校平均）が高い学校に所属する生徒は数学の成績が良くなる傾向にあるということも言える。これは，生徒が通っている学校のレベル（または偏差値）が高いほど，生徒の数学の成績は良くなると言い換えることができる。

さらにこれらの係数の信頼区間が 0 を含まないため，これらの変数は生徒の数学の成績（MATHACH）に強い効果を与えていると言える。

したがって，今回の分析からは，生徒の数学の成績は，教育レベルの高い学校に通い，社会経済的地位が高い生徒であればあるほど良い点数になるという結果が出た。

4.2 BtheB データの解析

4.2.1 データについて

BtheB データ（土屋 [4] 参照）の各変数は以下のとおりである。ここで，変数名の前の数字はその変数の階級を表している。

- (1)BDI : ベック抗うつ尺度の値
- (1)PRE : 治療前のベック抗うつ尺度の値
- (2)TREAT : 治療法（TAU:通常治療，BtheB:Beat the Blues）
- (2)LENG : 現在の抗うつエピソードの長さ (6m:6 カ月未満，6m:6 カ月以上)

この BtheB データに関して，ベック抗うつ尺度のフォローアップまでの値（BDI）が治療前のベック抗うつ尺度の値（PRE），治療法（TREAT）および現在の抗うつエピソードの長さ（LENG）からどのように説明できるのかを，HSB データと同様に階層的線形モデルによってモデル化し分析を行う。

4.2.2 モデルについて

階級 1 では，治療前のベック抗うつ尺度の値（PRE）を用いてベック抗うつ尺度の値（BDI）を予測する回帰式を立てる。階級 1 の単位は患者である。

$$BDI_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}(PRE_{ij}) + r_{ij} \tag{37}$$

階級 2 では，階級 1 の回帰式における治療期間ごとの切片と傾きを治療法（TREATMENT），抗うつエピソードの長さ（LENGTH）によって予測する回帰式を立てる。単位は治療期間である。

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} \quad + \gamma_{01}(TREAT_j) + \gamma_{02}(LENG_j) + u_{0j} \tag{38}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} \quad + \gamma_{11}(TREAT_j) + \gamma_{12}(LENG_j) + u_{1j} \tag{39}$$

4.2.3 解析結果

固定効果は表 3 のようになった。また，固定効果の 95% 信頼区間は表 4 のようになった。

表 3 固定効果:BtheB データ

	Value	Std.Error	t-value
(Intercept)	−1.4337	1.9040	−0.7531
treatTAU(γ_{01})	−3.6783	2.7044	−1.3601
leng>6m(γ_{02})	9.0999	2.6942	3.3775
pre(γ_{10})	0.5464	0.0986	5.5441
treatTAU:pre(γ_{11})	0.3433	0.1070	3.2094
leng>6m:pre(γ_{12})	−0.3056	0.1123	−2.7224

表 4 信頼区間:BtheB データ

	下限	上限
(Intercept)	−5.1655	2.2981
treatTAU(γ_{01})	−8.9789	1.6223
leng>6m(γ_{02})	3.8193	14.3805
pre(γ_{10})	0.3531	0.7397
treatTAU:pre(γ_{11})	0.1336	0.5530
leng>6m:pre(γ_{12})	−0.5257	−0.0855

4.2.4 考察

結果より，それぞれの推定値の中で leng>6m，pre が大きく反応している。そのため，階級 1 では治療前のベック抗うつ尺度の値（PRE）が大きくなるとベック抗うつ尺度の値（BDI）は大きくなる。階級 2 においては，抗うつエピソードの長さ（LENG）が 6 カ月以上の患者はベック抗うつ尺度の値（BDI）が大きくなる。

また，treatTAU:pre を見てみると治療前のベック抗うつ尺度（PRE）の値が大きく，通常治療（TAU）を続けている患者はベック抗うつ尺度（BDI）の値が大きいという結果が得られた。

さらにこれらの係数の信頼区間が 0 を含まないため，これらの変数はベック抗うつ尺度の値（BDI）に大きな効果を与えていると言える。

したがって，今回の分析結果からは治療前のうつ状態が進んでおり，そのうつ状態の期間が 6 カ月以上だった患者のベック抗うつ尺度の値は大きくなる。また，治療前のうつ状態が比較的重度でありながら通常の治療しか行っていない患者はベック抗うつ尺度の値が大きくなると分かった。

5 おわりに

階層データに階層的線形モデルを適用することにより，データの構造を考慮した適切な分析が行えるだけでなく，集団間の違いやそれを規定する要因についても様々な検討が可能となる。縦断的に収集されたデータも階層的データとみなせるから，これに階層的線形モデルを適用することにより，時間に伴う個人内の変化の考察も行うことが可能である。

参考文献

[1] Raudenbush,S.W., & Bryk, A.S. : *Hierarchical Linear Models: Applications and Data Analysis Methods (Second Edition)*: Sage, 2002.

[2] 奥村太一 :『階層的線形モデルによるデータの分析例-ソフトウェアの使い方を中心に-』, http://www.p.u-tokyo.ac.jp/ õkumurin/gd _ okumura.pdf, 2006.

[3] 土屋政雄 :『第 2 回心理・医学系研究者のためのデータ解析環境 R による統計学の研究会（土屋）-公開用』, http://researchmap.jp/mub50wc3w-32070/ , 2011.