$\mathcal{H}\infty$ 制御理論を用いた２入力２出力ヘリコプタの制御設計

M2010MM035 佐竹 徳哉
指導教員：高見 勲

1　はじめに

世の中のシステムは１入力１出力系と, 多入力多出力系があり, 現在存在する多くのシステムは多入力多出力系である．多入力多出力系のシステムは互いが干渉しあい, 制御することが１入力１出力系のシステムに比べ難しい. 多入力多出力系をいくつかの１入力１出力系に分散することで, 制御を行っていることが多い．しかし, 分散することで干渉による影響から制御性能を悪化させる可能性がある [1].

航空機をはじめとする現実の機械システムで用いられているアクチュエータには，最大出力や変化率，稼働範囲等に制約が存在しており，これらの制約は，閉ループ系の不安定化や装置の破壊などを引き起こす場合があることが知られている [2].

ヘリコプタは，非線形性の強いダイナミクスを持ち，多入出力系であることから，一般に制御困難な対象であると言える．人員や貨物の様々な輸送に利用されているので重量の変化があり，その影響でモデルが変化すると考えられる．そこで，ロバスト制御の一つである $\mathcal{H}\infty$ 制御理論を適用する．$\mathcal{H}\infty$ 制御理論は，モデルの不確かさを考慮するため正確なモデリングが困難な大規模で複雑なシステムでもロバスト性を保証することができる．以上を踏まえて，干渉を含めた２入力２出力系での制御設計を行う．

2　制御対象とモデリング

本研究で制御対象として使用する２自由度ヘリコプタを図１に示す.

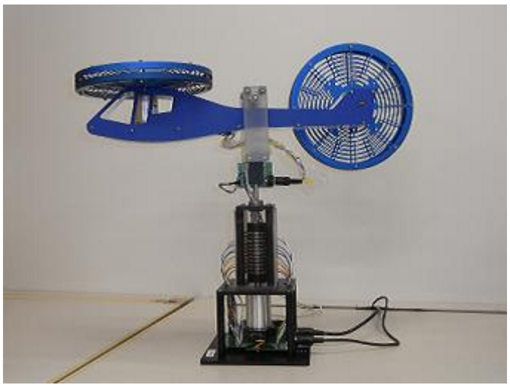

図１ ２自由度ヘリコプタ

また，２自由度ヘリコプタの概略図を図２に示す．これは２つのプロペラを持っており, 前のプロペラはピッチ軸まわりの回転を起こし, ヘリコプタ頭部の上下運動を制御する. 後ろのプロペラはヨー軸まわりの回転を起こし, ヘリコプタの左右の運動を制御する.

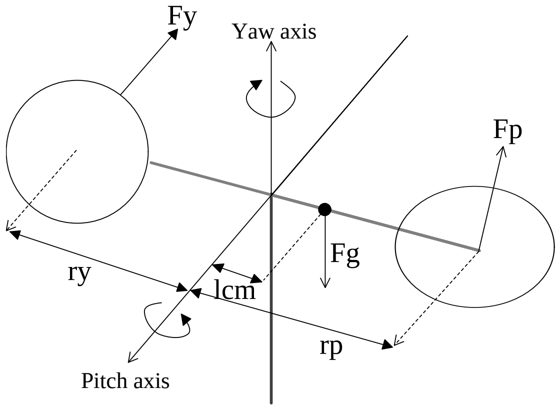

図２ ２自由度ヘリコプタ概略図

２自由度ヘリコプタの非線形運動方程式はオイラー・ラグランジュの運動方程式を用いることにより導出する．これらの方程式を原点のまわりで線形化すると以下の式が導出される．

$$\ddot{\theta} = \frac{K_{pp}V_{m,p} + K_{py}V_{m,y} - B_p\dot{\theta}}{J_{eq,p} + m_{heli}l_{cm}^2} \tag{1}$$

$$\ddot{\psi} = \frac{K_{yy}V_{m,y} + K_{yp}V_{m,p} - B_y\dot{\psi}}{J_{eq,y} + m_{heli}l_{cm}^2} \tag{2}$$

ここで, θ[rad]:ピッチ角, ψ[rad]:ヨー角, B[N/V]:等価粘性減衰, K[Nm/V]:推定トルク定数, J[kg•m^2]:慣性モーメント, m[mg]:ヘリコプタの質量, l_{cm}[m]:ピッチ軸から重心までの距離を表す [3].

また, 状態変数，状態空間表現は次式となる．

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \theta & \psi & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{B_p}{J_{eq,p}+M_{heli}l_{cm}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{B_y}{J_{eq,y}+M_{heli}l_{cm}^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{K_{pp}}{J_{eq,p}+M_{heli}l_{cm}^2} & \frac{K_{py}}{J_{eq,p}+M_{heli}l_{cm}^2} \\ \frac{K_{yp}}{J_{eq,y}+M_{heli}l_{cm}^2} & \frac{K_{yy}}{J_{eq,y}+M_{heli}l_{cm}^2} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

２入力２出力系のブロック線図を図３に示す.

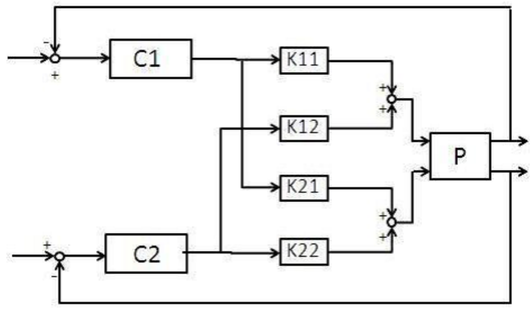

図３ ２入力２出力モデル

ここで, 偏差の積分器を含んだ拡大系を構成する.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

拡大系の状態変数は下記となる.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta & \psi & \dot{\theta} & \dot{\psi} & \int e_\theta dt & \int e_\psi dt \end{bmatrix}^T$$

3 $\mathcal{H}\infty$ 制御

3.1 ロバスト安定化問題

$P(s)$ をノミナルプラント，$\tilde{P}(s)$ を摂動プラントとする.

$$\Delta_m(s) = \tilde{P}(s)P(s)^{-1} - I \tag{4}$$

と関係づけられるとき，Δ_m(s) を乗法的不確かさという．図４は，乗法的不確かさを含んだプラントの入出力関係 $y = \tilde{P}u$ を表している.

ロバスト安定とは，モデルの不確かさを有する制御系においてノミナルプラントに基づいて設計された不確かさの変動範囲内で摂動プラントも安定化する性質を言う．ロバスト安定性の判別は，小ゲイン定理に基づいている.

3.2 乗法的不確かさに対するロバスト安定条件

図４において，a から b への伝達関数 T は次式になる．なお K はコントローラとする.

$$T = PK(I_p + PK)^{-1} \tag{5}$$

これに小ゲイン定理を適応したものが次式である.

$$\| \Delta_m T \|_\infty < 1 \tag{6}$$

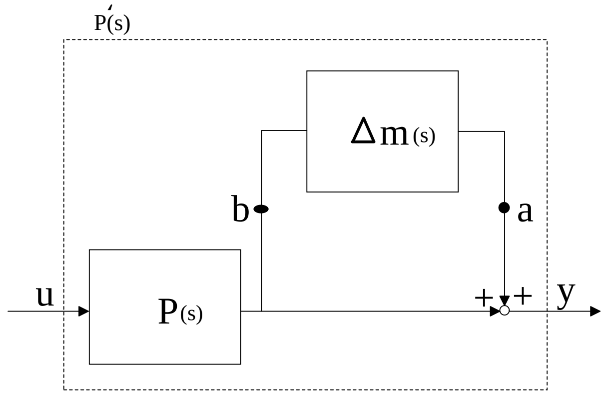

図４ 乗法的不確かさを含んだプラント

しかし，誤差である Δ_m を正確にモデル化することは不可能である．よって

$$\bar{\sigma} \mid \Delta_m(j\omega) \mid < \mid W_t(j\omega) \mid \tag{7}$$

を満足するような T に対する重み W_t をシステムに取り入れる．以上から乗法的不確かさに対するロバスト安定条件は次式になる [4].

$$\| W_t T \|_\infty < 1 \tag{8}$$

4 制御系設計

実際のヘリコプタには人や貨物を載せたりするので，重量が変わる．そこで，錘を用いてパラメータ変動を模擬する．また，変動するパラメータの変数は，制御対象の質量:m_{heli}[kg]，慣性モーメント:$J_{eq,p}$，$J_{eq,y}$[kg•m^2] である．パラメータの変動範囲を以下に示す．ヘリコプタンの質量は, 1.38≤ m_{heli}≤ 1.48[kg]，慣性モーメントは 0.0384≤$J_{eq,p}$ ≤ 0.0423[kg•m^2]，0.0432≤$J_{eq,p}$ ≤ 0.0471[kg•m^2] となる．通常時の状態をノミナルプラント P_0 とし，錘 0.05[kg], 0.1[kg] を付加した状態を摂動プラント P_{05}, P_1 とする.

P_0 と P_{05}，P_0 と P_1 の乗法的不確かさ Δ_m(s) を求め，小ゲイン定理を適用し，$\bar{\sigma} \mid \Delta_m(j\omega) \mid < \mid W_t(j\omega) \mid$ となる W_t を導出する．ここで $\bar{\sigma}$ は最大特異値を意味する．制御入力を制限するための重みを W_u，状態変数に対する重みを W_x とする.

P, W_t, W_x の状態空間表現の係数を次のようにする.

$$P = \begin{bmatrix} A_p & B_p \\ C_p & D_p \end{bmatrix}, W_t = \begin{bmatrix} A_t & B_t \\ C_t & D_t \end{bmatrix}, W_x = \begin{bmatrix} A_x & B_x \\ C_x & D_x \end{bmatrix}$$

これらを用いて一般化制御対象Ｇ (s) を定義する.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \end{cases} \tag{9}$$

と与える.

なお，LTI システム $G(s)$ が

$$\|G(s)\|_\infty < \gamma, \gamma > 0 \tag{10}$$

となる．

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_p & 0 & 0 & B_p \\ B_tC_p & A_t & 0 & B_tD_p \\ \hline 0 & 0 & 0 & W_u \\ D_tC_p & C_t & 0 & D_tD_p \\ Wx & 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{11}$$

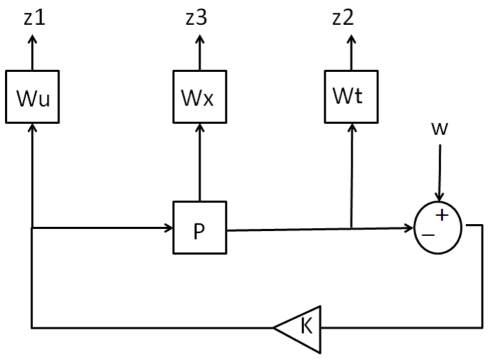

図 5 一般化制御対象

このシステムは可安定，可検出である．LMI(線形行列不等式) を用いてフィードバックゲインを求める．

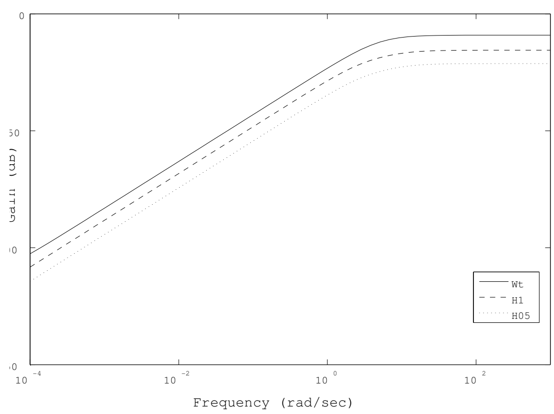

図 6 W_t,Δ_m

図 6 のように W_t が Δ_m を覆うように W_t を以下の値と設定する．

$$W_t = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1.75 & 0.35 \end{bmatrix} \tag{12}$$

また，試行錯誤の結果，W_u，W_x は以下の値とする．

$$W_u = \begin{bmatrix} 40 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$W_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

以上の 3 つの重みを適用すると，フィードバックゲイン K_h が次のように与えられる．

$$\begin{bmatrix} -577.52 & 21.58 & -61.42 & 5.97 & 80.91 & -2.71 & -0.01 & -0.01 \\ -188.98 & 1.55 & -20.10 & 0.42 & 26.72 & 0.65 & -0.01 & 0.11 \end{bmatrix}$$

フィードバックゲイン K_h を基に，ノミナルプラントと摂動プラントでシミュレーションを行った．今回は，θ 方向・ψ 方向に別々に 0.3[rad] のステップ入力を加える．ノミナルプラント・摂動プラントにおいて，オーバーシュートや振動もなく目標値に追従した．しかし，$\mathcal{H}\infty$ のフィードバックゲイン K_h と最適レギュレータで求めるフィードバックゲインを比べると，K_h の方がハイゲインになっている．

$$K_{LQR} = \begin{bmatrix} 17.6 & 1.36 & 7.45 & 1.5 & 4.97 & 0.103 \\ -1.94 & 13.4 & -0.414 & 11.4 & -0.514 & 0.995 \end{bmatrix} \tag{14}$$

実験を行うと，制御入力が大きいため発散してしまう．そこで極配置法を用い改善する．K_h を用いた極は次のようになる．-143.5 が他の極と比べ原点から遠いためハイゲインの原因と考える．

$$pole = \begin{bmatrix} -143.50 \\ -9.26 \\ -3.57 \\ -0.14 \\ -0.56 + 0.16i \\ -0.56 - 0.16i \\ -9.9526 \\ -0.0550 \end{bmatrix} \tag{15}$$

極配置領域の規定方法は、極の実部範囲を規定する．システムの極を次式とする．

$$\lambda = x + jy \tag{16}$$

試行錯誤の結果，システムの極が $-10 < x < 0$ の範囲内に存在する時に応答が収束する．この極配置領域を図 7 に示す．

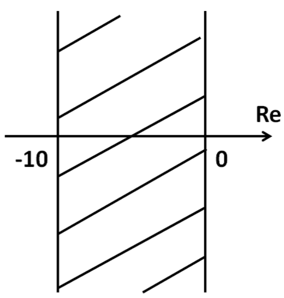

図 7 極配置領域

図 7 に極配置領域を限定するには，LMI の条件式と次の 2 式を満足する $P > 0$ が存在すればよい．

$$PA + A^T P + 20P > 0 \tag{17}$$

$$PA + A^T P < 0 \tag{18}$$

この極配置領域内に極配置すると，極は次のようになる．

$$pole = \begin{bmatrix} -9.5743 \\ -9.2756 \\ -3.5625 \\ -0.5211 + 0.1937i \\ -0.5211 - 0.1937i \\ -0.1433 \\ -9.9447 \\ -0.0565 \end{bmatrix} \tag{19}$$

フィードバックゲイン K_λ は次のようになる．

$$\begin{bmatrix} -39.14 & 1.48 & -4.12 & 0.41 & 5.45 & -0.19 & -0.01 & -0.01 \\ -13.39 & -4.59 & -1.42 & -1.28 & 2.08 & 1.32 & -0.01 & 0.11 \end{bmatrix}$$

5 シミュレーション・実験結果

極配置により求めたフィードバックゲイン K_λ を基に，θ 方向・ψ 方向に別々に 0.3[rad] のステップ入力を加える．ノミナルプラント・摂動プラントでシミュレーション・実験を行った．

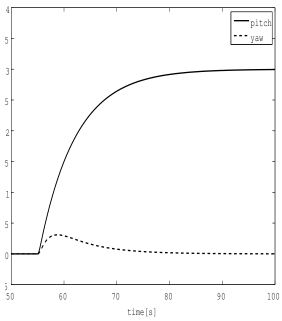

図 8 $P_0 : \theta = 0.3$

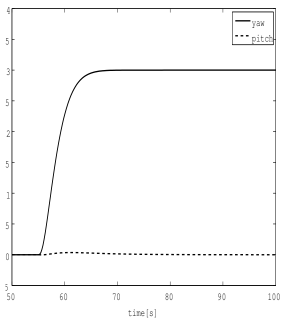

図 9 $P_0 : \psi = 0.3$

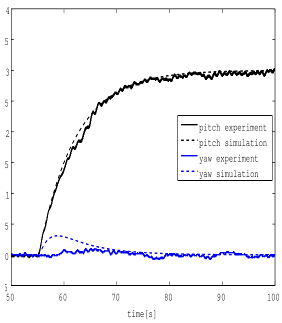

図 10 $P_0 : \theta = 0.3$

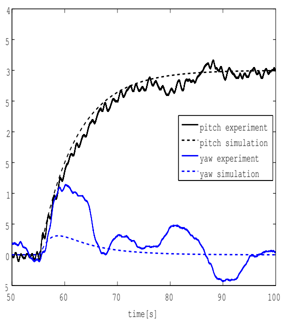

図 11 $P_{05} : \theta = 0.3$

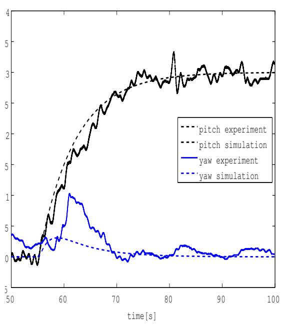

図 12 $P_1 : \theta = 0.3$

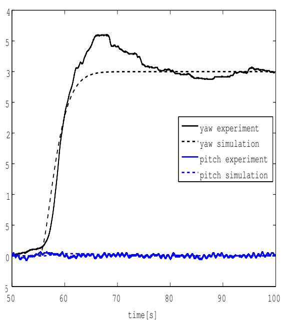

図 13 $P_0 : \psi = 0.3$

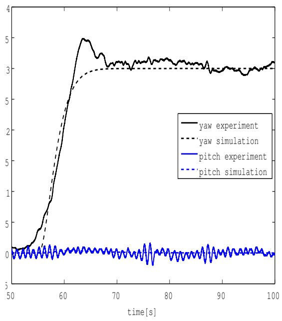

図 14 $P_{05} : \psi = 0.3$

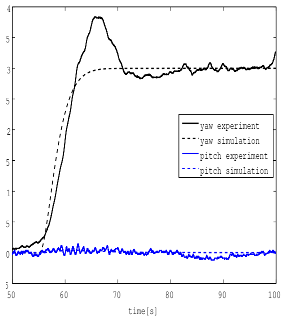

図 15 $P_1 : \psi = 0.3$

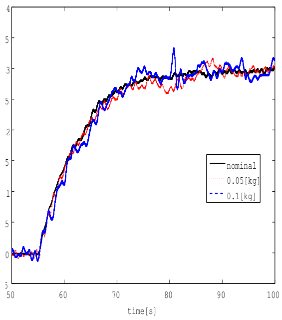

図 16 比較:$\theta = 0.3$

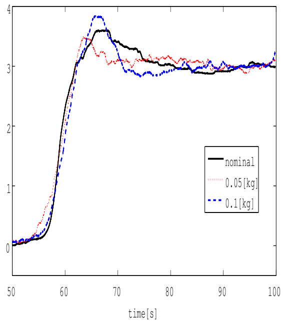

図 17 比較 $\psi = 0.3$

図 8，図 9 はシミュレーション結果，図 10〜図 15 は実験結果である．図 16，図 17 は，ノミナルプラントと摂動プラントの実験の比較である．

ピッチ角はノミナルプラント・摂動プラントともに，目標値に追従している．ヨー角は少しオーバーシュートがあるが，目標値に追従していることが分かる．よってロバスト性を保証していると言える．

6 おわりに

多入力多出力系に対しロバスト安定性とロバスト制御性能を維持し，極領域指定によりハイゲインフィードバックを防止して操作量が過度に変動することを防止した制御系設計法を採用し，シミュレーション・実験によりその性能を確認した．

参考文献

[1] 佐伯正美：制御構造制約のある $\mathcal{H}\infty$ 制御問題に対する PID 制御器設計，計測自動制御学会論文集号，Vol.41，No.2，149/156 (2005).

[2] 和田信敬，南昌行，松尾祥也，佐伯正美：ツインローターヘリコプターモデルの目標信号追従制御．日本ロボット学会誌第 27 巻第 2 号，(2009).

[3] 早瀬雄太：$\mathcal{H}\infty$ 制御理論を用いた 2 自由度ヘリコプタの姿勢制御，南山大学 数理情報学部 数理情報学科 (2009).

[4] 藤森篤：ロバスト制御，コロナ社，2001.