多次元正規密度関数の区間領域における精度保証付き数値積分法

M2010MM017 筧恵介
指導教員：杉浦洋

1 はじめに

本研究では多次元正規密度関数に対して有効な精度保証付き数値積分法を求めることを目的としており，Mathematica を用いた数値実験を行う事でその有効性について考察する．

精度保証付き計算とは，求めるべき真値に対して，近似値とその絶対誤差の上界を計算する方法である．そのためには，近似値の計算式に関する理論誤差解析と，近似式計算における丸め誤差解析が必要である．今回は，理論誤差解析の研究を中心に行った．

本稿は第２，３節で参考文献 [1][2][3][4] を参照し本稿に必要な諸定義，定理についてまとめ，以降の節でさまざまな次元における正規分布の密度関数の誤差解析の結果をまとめた．

2 正規分布

2.1 １次元正規分布

平均を μ, 分散を σ^2 とすると，1 次元正規分布は $N(\mu,\sigma^2)$ と表される．
１次元正規分布の密度関数

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\},-\infty<x<\infty \tag{1}$$

2.2 多次元正規分布

確率ベクトル $\boldsymbol{X}\equiv^t(X_1,\dots,X_n)$ の同時密度関数が

$$f(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\det(\Sigma)^{\frac{1}{2}}}\exp\{-\frac{1}{2}\quad {}^t(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\} \tag{2}$$

$\boldsymbol{x}\equiv{}^t(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, $\Theta=\{(\boldsymbol{\mu},\Sigma)|\boldsymbol{\mu}\equiv{}^t(\mu_1,\dots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n$,$\Sigma$は n 次正定値対称行列 $\}$

3 数値積分法

3.1 Gauss 積分公式

[定理 3.1]
[3] より，n 点 Gauss 公式では，$f\in C^N[-1,1](N\geq 2n)$ ならば

$$|I_nf-If|\leq\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)(2n)!)^3}\max_{-1\leq\xi\leq 1}|f^{(2n)}(\xi)| \tag{3}$$

さらに，区間 (a,b) の n 点 Gauss 積分則を，
$c=\frac{a+b}{2}$, $r=\frac{b-a}{2}$ とおくと，

$$\begin{aligned}Q_nf&=\frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n}w_i^{(n)}f(c+rx_i^{(n)})\\&\cong\int_{-1}^{1}f(rt+c)dt=\int_a^b f(x)dx\end{aligned} \tag{4}$$

と書ける．$x_i^{(n)}$ は n 次 Legendre 多項式の 0 点．$w_i^{(n)}$ はクリストッフェル数である。

3.2 Hermite 多項式

[定義 3.1] 常微分方程式

$$(\frac{d^2}{dx^2}-2x\frac{d}{dx}+2n)H_n(x)=0 \tag{5}$$

を満たす多項式 $H_n(x)$ を Hermite 多項式という．
ここで，Rodrigues の公式 [4] より

$$H_n(x)=(-1)^ne^{x^2}(\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}) \tag{6}$$

となるさらに，不等式 [4] より

$$|H_{2n}(x)|\leq e^{\frac{x^2}{2}}2^{2n}n![2-\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}] \tag{7}$$

$$\begin{aligned}\therefore|\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}e^{-x^2}|&\leq e^{-\frac{x^2}{2}}2^{2n}n![2-\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}]\\&\leq 2^{2n}n![2-\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}]\end{aligned} \tag{8}$$

$$\therefore|\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}e^{-(ax)^2}|\leq(2a)^{2n}n![2-\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}] \tag{9}$$

4 関数空間とノルム

4.1 Gauss 積分則のノルム

[定理 3.2] 区間 $[a,b]$ の n 点 Gauss 則 (3.7) に対して

$$||Q_n||_\infty=|b-a| \tag{10}$$

$D=[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\dots\times[a_s,b_s]\subset\mathbb{R}^s$ とすると，
今，$f\in C(D)$ について，$c_l=\frac{a_l+b_l}{2}$, $r_l=\frac{b_l-a_l}{2}$ とし、

$$Q_n^{(x_l)}f=r_l\sum_{i=0}^{n}w_i^{(n)}f(x_1,\dots,x_{l-1},r_lx_i^{(n)}+c_l,x_{l+1},\dots,x_s) \tag{11}$$

このとき，$\boldsymbol{n}=(n_1,\dots,n_s)$ とおき，多重積分公式

$$\begin{aligned}Q_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{x}}f&\equiv Q_{n_1}^{(x_1)}Q_{n_2}^{(x_2)}\dots Q_{n_s}^{(x_s)}f\\&\cong\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_s}^{b_s}f(x_1,\dots,x_n)dx_1\dots dx_n\end{aligned} \tag{12}$$

を定義する．このとき次の命題が成立する．
汎関数 $Q_{\boldsymbol{n}}$ について

$$||Q||_\infty=V=\prod_{i=1}^{s}|b_i-a_i| \tag{13}$$

5 １次元正規分布における誤差

5.1 評価関数 M の導入

区間 $[a,b]$ の関数 $f(x)=e^{-\tau(x-\mu)^2}$ について，積分誤差

$$E_nf=Q_nf-If \tag{14}$$

を定義する．このとき次の定理が成り立つ
[定理 4.1]

$$|E_n f| \leq M(n,a,b,\tau).$$

$$M(n,a,b,\tau) = \frac{(2d)^{2n+1}(n!)^5}{(2n+1)((2n)!)^3}\tau^n[1-\frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}] \quad (d=|b-a|) \tag{15}$$

5.1.1 関数 M の検証

積分区間 $[a,b]$ に対し，Mathematica 上で誤差関数 erf を用いて倍精度計算した If を真値と見なし，n 点 Gauss 則による近似値 $Q_n f$，誤差 $E_n f = If - Q_n f$，上界による $E_n f$ の上界 $MM = M(n,a,b,\tau)$ 及び $rate = \log_{10}\frac{MM}{|E_n f|}$ とする．
[実験結果]
$n=30 \quad a=-7 \quad b=7 \quad \tau=0.5$ のとき
$If = 2.50663 \quad Q_n f = 2.50663$
$MM = 6.24194\times 10^{-7} \quad rate = 5.99526$
また，a,b の組を区間 $[-7,7]$ の 20 等分点のすべての組合わせ (ただし $a<b$) として実験し，すべての組み合わせについて $rate<0$ を確認した．$n=40$ のとき，実験はすべて成功した．

5.2 誤差理論

１次正規分布 $N(\mu,\sigma^2)$ の密度関数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{16}$$

ここで $\tau = \frac{1}{2\sigma^2}$ とおくと

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\tau(x-\mu)^2}. \tag{17}$$

ゆえに定理 (4.1) より $f(x)$ の積分誤差は

$$|E_n f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}M(n,a,b,\tau) \tag{18}$$

ここで積分誤差が 10^{-10} 以下になるような n の値を求めようとする．密度関数 $f(x)$ は x が平均値より離れるほど値が小さくなるので，積分しても上の誤差に影響が無くなるような区間を求める．

$$P(x \geq \mu+7\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{\mu+7\sigma}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \tag{19}$$

$s = \frac{x-\mu}{\sigma} \quad , \quad ds = \frac{dx}{\sigma}$ とすると

$$\begin{aligned} P(x \geq \mu+7\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_7^{\infty} e^{\frac{-s^2}{2}}ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_7^{\infty} e^{-\frac{7}{2}s}ds \\ &= \frac{2}{7\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{49}{2}} \simeq 2.60992\times 10^{-12} \end{aligned} \tag{20}$$

積分区間 $[a',b'] = [a,b]\cap[\mu-7\sigma,\mu+7\sigma]$ とすると

$$|P(a' \leq x \leq b') - P(a \leq x \leq b)| < 5.3\times 10^{-12} \tag{21}$$

$P(a' \leq x \leq b')$ を n 点 Gauss 則で計算した Q_n を求め

$$|Q_n - P(a \leq x \leq b)| \leq 0.94\times 10^{-10} \tag{22}$$

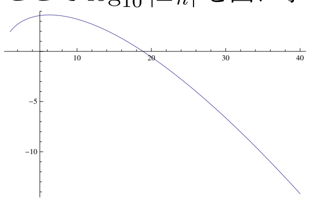
となれば

$$\begin{aligned} |Q_n - P(a \leq x \leq b)| &\leq |Q_n - P(a' \leq x \leq b')| \\ &\quad + |P(a' \leq x \leq b') - P(a \leq x \leq b)| \\ &\leq 0.94\times 10^{-10} + 5.3\times 10^{-12} \\ &< 10^{-10} \end{aligned} \tag{23}$$

が達成されるから，$d = b'-a' \leq 14\sigma$ とおいて式 (4.9) より，

$$|E_n| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}}(\frac{28}{\sqrt{2}})^{2n+1}\frac{(n!)^5}{(2n+1)((2n)!)^3}[1-\frac{1}{2^{2n+1}}\binom{2n}{n}] \tag{24}$$

が得られる．
ここで $\log_{10}|E_n|$ を図に示す．



ここで $n = 35$ のときの値は $E_{35} \leq 5.7\times 10^{-11} < 0.94\times 10^{-10}$．これにより $n \geq 35$ のとき目標を達成する．

5.3 実験結果

積分区間 $[a,b]$，平均 μ，分散 σ^2，点数 n を引数し，n 点 Gauss 則における数値積分の値とそのときの誤差の上界を求める，ここで，$a=-5, b=5, \sigma=10, \mu=0$ とおき，40 桁計算したものを真値とする．
誤差の上界を M_n，Mathematica 上の誤差関数 erf を用いて計算した真値に対する誤差を E_n とおき，$M_n \geq |E_n|$ を調べる．
[実験結果]
n=30 のとき
$M_n = 3.036825373\times 10^{-16}, E_n = 4.776285080\times 10^{-20}$
同様の実験を，a を区間 $[-15,1]$ 上の点,b を区間 $[-15,15]$(ただし $a<b$) 上の点,σ を区間 $[0,2]$ 上の点,μ を区間 $[-1,1]$ 上の点をそれぞれ任意にとり，もし，$M_n \leq |E_n|$ の成立を確かめる実験を 100 回行ったら，すべての実験は成功した．
次に，区間を $[a',b'] = [a,b]\cap[\mu-7\sigma,\mu+7\sigma]$ でおさえたときの実験結果を示す．
[実験結果]
$[a,b] = [-7,7], \sigma=2, \mu=0$ のとき
$|E_n| = 6.58\times 10^{-35}$
$[a,b] = [-100,100], \sigma=2, \mu=0$ のとき
$|E_n| = 2.55957849522415979476582582\times 10^{-12}$
どの結果も目標 ($|E_n| \leq 10^{-10}$) を満たしている．
さらに，$a = [-100,100], b = [-100,100], \mu = [-1,1], \sigma = [0,2]$ を任意にとり，($|E_n| \leq 10^{-10}$) を満たさない場合その区間と誤差を出力する実験を 100 回行う．すべての実験結果がこの理論を認める結果となった．

6　2次元正規分布における誤差

s 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^s$ の領域 $D = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_s, b_s]$ 上の連続関数全体を $C(D)$ とする．
$f \in C(D)$ について，

$$I^{(x_l)} f = \int_{a_l}^{b_l} f(x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_s) dx_l \tag{25}$$

とする．s 重積分は

$$I^{\boldsymbol{x}} f = I^{(x_1)} I^{(x_2)} \ldots I^{(x_s)} f \tag{26}$$

と表せる．また，

$$E_{n_l}^{(x_l)} f = Q^{(x_l)} f \qquad (1 \leq l \leq s) \tag{27}$$

$$E^{\boldsymbol{x}} f = Q_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{x}} f - I^{\boldsymbol{x}} f \tag{28}$$

と定義する．ここで，$Q_{n_l}^{x_l}, Q_{\boldsymbol{n}}^{\boldsymbol{x}}$ は式 (3.26)，式 (3.27) で定義された作用素である．
交換則 $I^{(x)} I^{(y)} = I^{(y)} I^{(x)}$,
$Q^{(x)} Q^{(y)} = Q^{(y)} Q^{(x)}, I^{(x)} Q^{(y)} = Q^{(y)} I^{(x)}$ がいえる．

6.1　誤差理論

領域 $D = [a_x, b_x] \times [a_y, b_y] \subset \mathbb{R}^2$ について $f \in C(D)$ とすると，積分誤差の絶対値は次のように評価される．

$$\begin{aligned} |E^{(x,y)} f| &= |Q_n^{(x)}(Q_n^{(y)} f) - I^{(x)}(I^{(y)} f)| \\ &\leq |Q_n^{(x)}(Q_n^{(y)} f) - Q_n^{(x)}(I^{(y)} f)| + \\ &\qquad |Q_n^{(x)}(I^{(y)} f) - I^{(x)}(I^{(y)} f)| \\ &\leq |Q_n^{(x)}(E_n^{(y)} f)| + |E_n^{(x)}(I^{(y)} f)| \\ &\leq d_x \max_{a_x \leq x \leq b_x} |E_n^{(x)} f| + d_y \max_{a_y \leq x \leq b_y} |E_n^{(y)} f| \\ &\qquad (d_x = |a_x - b_x|, d_y = |a_y - b_y|) \end{aligned} \tag{29}$$

$|\max_{a_y \leq y \leq b_y} E_n^{(x)} f| = E_x$，$|\max_{a_x \leq x \leq b_x} E_n^{(y)} f| = E_y$
としそれぞれ求める．まず $|E_x|$ を求める．
2次元正規分布の同時密度関数

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})' \Sigma (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{\mu})\}$$

$$\boldsymbol{X} = (x, y), \boldsymbol{\mu} = (\mu_x, \mu_y) \tag{30}$$

ここで $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix}$ だから

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(X - \mu)' \Sigma (X - \mu)\} \\ &= C \times \exp\{-\frac{1}{2}(\sigma_{xx}^2 (x - \mu_x)^2 + 2\sigma_{xy}(x - \mu_x) \\ &\quad (y - \mu_y) + \sigma_{yy}^2 (y - \mu_{yy})^2)\} \qquad C = \frac{1}{2\pi} \det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{31}$$

と書ける．さらに $(\sigma_{xx}(x - \mu_x)^2 + 2\sigma_{xy}(x - \mu_x)(y -_m u_y) + \sigma_{yy}(y - \mu_{yy})^2)$ を平方完成をする．

$$f(x, y) \leq \frac{\det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \exp(-\frac{1}{2}\sigma_{xx}(x - \mu_x + \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}(y - \sigma_y))^2) \tag{32}$$

となる．以上の事から

$$|E_x| \leq \frac{\det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} |M(n, a_x, b_x, \frac{1}{2}\sigma_{xx})| \tag{33}$$

同様に

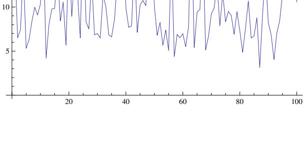
$$|E_y| \leq \frac{\det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} |M(n, a_y, b_y, \frac{1}{2}\sigma_{yy})| \tag{34}$$

となるから．

$$\begin{aligned} |E^{(x,y)} f| \leq \frac{\det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} &(d_x |M(n, a_y, b_y, \frac{1}{2}\sigma_{yy})| \\ &+ \quad d_y |M(n, a_x, b_x, \frac{1}{2}\sigma_{xx})|) \end{aligned} \tag{35}$$

6.2　実験結果

まず，2次元正規分布の同時密度関数の数値積分の真値を求めたい．しかし，Mathematicaでは2重積分を行う際，Mathematica 上での数値積分が行われる．Mathematica の数値積分の誤差は計ることが出来ないため，上の2次元正規分布の誤差の誤差理論を用いて推測する．最初に任意の点数 $\boldsymbol{n} = \{n_x, n_y\}$ における n 点 Gauss 則を用いた近似値1（If_1）と絶対誤差の上界 M_n を求める関数 P2 を作成する．さらに，点数 N よりそれぞれ 10 点ずつ多い $\boldsymbol{m} = \{n_x + 10, n_y + 10\}$ における m 点 Gauss 則における近似値2（If_2）を求める．ここで，If_1 の誤差を $E_n = If_1 - If_2$ とし，その数値と誤差 M_n を評価し検証する．[実験結果]
区間 $\{a_x, b_x\} = \{-7, 7\}, \{a_y, b_y\} = \{-7, 7\}$, 平均$\mu = 0$ とする．分散共分散行列 $\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \quad (i, j = 1, 2)$ は a_{ij} を区間 [-5,5] の一様乱数でとり $\Sigma = \frac{1}{8}\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} + I$ をとることで最小固有値が小さくなりすぎないように Σ を作る．
有効桁数は 50 桁とする．
$n = \{30, 30\}$ のとき
近似値1：$If_1 = 0.9997578299$
近似値2：$If_2 = 0.9997578299$
推定誤差：$M_n = 4.3640626726 \times 10^{-11}$
If_1 の誤差：$E_n = 4.1338147138 \times 10^{-16}$
さらにここで，$\{a_x, b_x\}, \{a_y, b_y\}$ を区間 [-7,7] 上 $(a_x < b_x, a_y < b_y)$，$\boldsymbol{\mu} = [0, 1]$ で一様乱数で定め，実験を１００回行った．
$|\frac{E_n}{M_n}| < 1$ となれば目標を満たすので，$\log_{10}(-|\frac{E_n}{M_n}|)$ をグラフに表すことで，理論を検証する．ただし，$|\frac{E_{n'}}{M_{n'}}| < 10^{-20}(|E_n| << 小, |M_n| >> 大)$ のときは $|\frac{E_{n'}}{M_{n'}}| = 10^{-20}$ とし，極端な数値は省く事とする．
以下は横軸が問題番号，縦軸が $\log_{10}(-|\frac{E_n}{M_n}|)$ をあらわした図である．



7　多次元正規分布における誤差

7.1　3 次元正規分布における誤差理論

3 次元正規分布の密度関数は

$$f(x,y,z) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} \det(\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})' \Sigma^{-1}(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{\mu})\} \qquad (\boldsymbol{X} = x,y,z, \boldsymbol{\mu} = \mu_x,\mu_y,\mu_z) \tag{36}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

とおくと

$$\begin{aligned} |E^{(x,y,z)}f| &= |Q^{(x)}Q^{(y)}Q^{(z)}f - I^{(x)}I^{(y)}I^{(z)}f| \\ &\leq |Q^{(x)}Q^{(y)}Q^{(z)}f - Q^{(x)}Q^{(y)}I^{(z)}f| \\ &\quad + |Q^{(x)}Q^{(y)}I^{(z)}f - I^{(x)}I^{(y)}I^{(z)}f| \\ &\leq |Q^{(x)}Q^{(y)}E^{(z)}f| + |Q^{(x)}Q^{(y)}I^{(z)}f - \\ &\quad Q^{(x)}I^{(y)}I^{(z)}f| + |Q^{(x)}I^{(y)}I^{(z)}f - I^{(x)}I^{(y)}I^{(z)}f| \\ &= |Q^{(x)}Q^{(y)}E^{(z)}f| + |Q^{(x)}E^{(y)}I^{(z)}f| \\ &\quad + |E^{(x)}I^{(y)}I^{(z)}f| \\ &\leq d_x d_y|E^{(z)}f| + d_x d_z|E^{(y)}f| + d_y d_z|E^{(z)}f| \\ &\quad (d_x, d_y, d_z \text{はそれぞれの区間の長さ}) \end{aligned} \tag{37}$$

次に，この方法を用いて s 次元の誤差評価式を作る．

7.2　s 次元正規分布における誤差理論

[定理 6.1] $Ef = I^{(1)} \ldots I^{(s)}f - Q^{(1)} \ldots Q^{(s)}f$ とすると

$$|Ef| \leq \left| (\prod_{i=1}^{s} l_i)(\sum_{i=1}^{s} \frac{||E^{(i)}f||_\infty}{l_1}) \right| \tag{38}$$

(pr) 次元数 s に対する数学的帰納法をもちいる
$s=1$ のとき

$$|Ef| = ||E^{(1)}f||_\infty = l_1 \frac{||E^{(1)}f||_\infty}{l_1} \tag{39}$$

で成立する．
$s=k$ のときに成り立つと仮定し，$s=k+1$ のとき

$$\begin{aligned} |Ef| &= |I^{(1)} \ldots I^{(k+1)}f - Q^{(1)} \ldots Q^{(k+1)}f| \\ &\leq |I^{(1)} \ldots I^{(K)}I^{(k+1)}f - I^{(1)} \ldots I^{(k)}Q^{(k+1)}f| \\ &\quad + |I^{(1)} \ldots I^{(k)}Q^{(k+1)}f - Q^{(1)} \ldots Q^{(k)}Q^{(k+1)}f| \\ &\leq |I^{(1)} \ldots I^{(k)}E^{(k+1)}f| + |Q^{(k+1)}(I^{(1)} \ldots I^{(k)}f(X) \\ &\quad - Q^{(1)} \ldots Q^{(k)}f)| \\ &\leq ||I^{1} \ldots I^{(k)}||_\infty ||E^{(k+1)}f|| + ||Q^{(k+1)}||_\infty ||I^{(1)} \\ &\quad \ldots I^{(k)}f - Q^{(1)} \ldots Q^{(k)}||_\infty \end{aligned} \tag{40}$$

これに，$||I^{(1)} \ldots I^{(k)}||_\infty = \prod_{i=1}^{k}, ||Q^{(k+1)}||_\infty \leq l_k$ と帰納法の仮定より，

$$||I^{(1)} \ldots I^{(k)}f(X) - Q^{(1) \ldots Q^{(k)}f}||_\infty \leq (\prod_{i=1}^{k} l_i)(\sum_{i=1}^{k} \frac{||E^{(i)}f||_\infty}{l_i}) \tag{41}$$

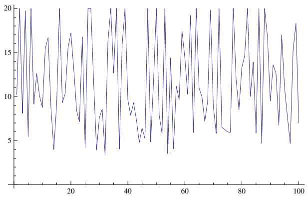
を代入し，

$$\begin{aligned} |Ef| &\leq (\prod_{i=1}^{k} l_i)||E^{(k+1)}f||_\infty + l_{k+1}(\prod_{i=1}^{k} l_i)(\sum_{i=1}^{k} \frac{||E^{(i)}f||_\infty}{l_i}) \\ &= (\prod_{i=1}^{k+1} l_i)(\sum_{i=1}^{k+1} \frac{||E^{(i)}f||_\infty}{l_i}) \end{aligned} \tag{42}$$

よって，$s=k+1$ のときも成り立つ．
$\therefore$ 任意の s で成り立つ．

7.3　3 次元正規分布の実験

3 次元正規分布の実験は 2 次元のときと同様な条件のもと実験を行った．
[実験結果]
区間 $\{a_x, b_x\} = \{-7, 7\}, \{a_y, b_y\} = \{-7, 7\}, \{a_z, b_z\} = \{-7, 7\}$, 平均$\mu = 0$ とする．
有効桁数は 50 桁とする．
$n = \{40, 40, 40\}$ のとき
近似値１：$If_1 = 0.9989053716428$
近似値２：$If_2 = 0.9989053715943$
推定誤差：$M_n = 1.4052645141 \times 10^{-11}$
If_1 の誤差：$En = 3.5036158708 \times 10^{-27}$
さらにここで，$\{a_x, b_x\}, \{a_y, b_y\}, \{a_z b_z\}$ を区間 [-7,7] 上 $(a_x < b_x, a_y < b_y, a_z < b_z)$，$\boldsymbol{\mu} = [0,1]$ 上で一様乱数で定め，実験を１００回行った．
２次元のときと同じように，この理論を検証する．ここで，$|\frac{E_{n'}}{M_{n'}}| < 10^{-20}(|E_n| << 小, |M_n| >> 大)$ のときは $|\frac{E_{n'}}{M_{n'}}| = 10^{-20}$ とし，極端な数値は省く事とする．
以下は横軸が問題番号，縦軸が $\log_{10}(-|\frac{E_n}{M_n}|)$ をあらわした図である．



8　今後の課題

本研究によって、多次元正規密度関数の区間領域における精度保証付き数値積分法として、n 点 Gauss 則を用いた数値積分法に関して考察し、誤差理論を確立することができた．
今後は準モンテカルロ法など別の方法で数値実験方法を研究し、本研究の結果と比較をすることでよりよいシステムを確立することが目標である．

参考文献

[1] 青本和彦, 上野健爾, 加藤和也, 神保道夫, 砂田利一, 高橋陽一郎, 深谷賢治, 俣野博, 室田一雄:『岩波数学入門辞典』, 岩波書籍, 東京,2005

[2] 白旗信吾:『統計解析学入門』．共立出版，東京，1992.

[3] 室田　一雄, 杉原正顕:『数値計算の数理』．岩波書籍，東京，1994.

[4] Gabor Szrgo:『Orthogonal Polynomials』，4 版.Amer Mathematical Society;Washington，1981.