形式体系に基づく実証明の分析

M2010MM021 加藤 あや美

指導教員：佐々木 克巳

1 はじめに

本研究は、シークエント体系 SNK に基づいて、集合の分野で扱われている定理の証明を分析する。具体的に扱う定理は、ド・モルガン律と分配律、すなわち、3 つの集合 A, B, C に対する次の 4 つの性質である。

性質 1 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

性質 2 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

性質 3 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

性質 4 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

上の 4 つの性質に対し、次の手順でその証明を分析する。

1. 各性質に対して、18 冊の文献から証明を抽出する。
2. 手順 1 で抽出した証明をシークエントの変化で表現する。この表現を、実際の証明図と名付ける。
3. 手順 2 の証明図に、SNK 推論規則を補って SNK 証明図を作成する。この証明図を、省略なしの証明図と名付ける。
4. 手順 3 の証明図を、その形から分類する。
5. 各分類に対して、多く用いられている推論規則の組み合わせを調べる。
6. 手順 5 の結果から、適切な証明図を作成する。
7. 手順 6 の証明図を、実証明文に変換する。
8. 手順 6 で出てきた推論規則の組み合わせに対し、対応する日本語の文をまとめる。

手順 1 で抽出した証明は、次のいずれかの方法で示されていた。

方法 1 (左辺 $\subseteq$ 右辺) と (右辺 $\subseteq$ 左辺) を示す方法

方法 2 $\forall x(x \in$ 左辺 $\Leftrightarrow x \in$ 右辺$)$ を示す方法

本稿では、体系 SNK の説明と手順 2,3,4,6 について述べる。以下では、方法 1 の (左辺 $\subseteq$ 右辺),(右辺 $\subseteq$ 左辺) をそれぞれ (左 $\subseteq$ 右),(右 $\subseteq$ 左) と略記する。

2 体系 SNK

この節では、本研究で扱った体系 SNK について述べる。

論理式は次の言語を用いて、普通の方法で定義する。

1. 対象変数 x
2. (集合 A, B に対する) 述語記号
   - 1 変数の述語記号 "$\in A$"
   - 0 変数の述語記号 "$A \subseteq B$"
   - 0 変数の述語記号 "$A = B$"
3. 論理記号 $\wedge$(かつ),$\vee$(または),$\supset$(ならば),$\neg$(でない),$\forall$(すべて)

論理式を表すのに、P,Q,R,P_1,P_2,$\cdots$などの記号を、論理式の有限集合を表すのに Γ を用いる。また、論理式 $(P \supset Q) \wedge (Q \supset P)$ を $P \Leftrightarrow Q$ と略記する。論理式の解釈は、述語記号をそのまま集合の文と解釈し、各論理記号をそのまま日本語に反映させて解釈して定まるものとする。本研究では、論理式 P と P からその解釈で定まる文を同一視して、その文も P で表すことにする。

体系 SNK の定義は、文献 [2] に従う。ここでは、その概観を述べる。まず、式について述べる。表現

$$\Gamma \to P$$

を式という。Γ をこの式の左辺、P を右辺という。左辺に "$\{$","$\}$","$\cup$" が出現するときは、適宜省略する。例えば、

$$\{P_1, P_2\} \cup \Gamma \to Q$$

を

$$P_1, P_2, \Gamma \to Q$$

のように省略する。次に、推論規則について述べる。式 $S, S_1, \cdots, S_n$ に対し、図式

$$\frac{S_1 \qquad \cdots \qquad S_n}{S}$$

を推論規則という。S をこの推論規則の下式、各 S_i をこの推論規則の上式という。最後に、SNK 証明図について述べる。SNK 証明図は、SNK 公理 $P \to P$ と SNK 推論規則から普通の方法で定義する。証明図の一番下の式を終式、一番上の式を始式という。なお、SNK 証明図は終式から上に向かって作成することが多いので、ある SNK 推論規則を優先するとは、この SNK 推論規則を証明図の下側で適用することとする。

本研究では、実際の証明に近い SNK 証明図を作成したいので、文献 [2] の SNK 推論規則 Def をより具体的に定義し、さらにいくつかの推論規則を文献 [2] の SNK 推論規則に追加する。以下、集合を表す記号として、A,B,C などを用いる。

文献 [2] では、文 P_1 が文 P_2 により定義されているとき、

$$\frac{P_2, \Gamma \to Q}{P_1, \Gamma \to Q} \qquad \frac{\Gamma \to P_2}{\Gamma \to P_1} \tag{1}$$

の 2 つの SNK 推論規則 Def を導入した。ここでは、P_1, P_2 の具体的な関係を表 1 に定める。表 1 には、各 P_1, P_2 に対応する推論規則の名前も記しておく。

文 P_1 と文 P_2 に

- $P_1 \Leftrightarrow P_2$ がよく用いられている性質である。

という関係があるときも、(1) の形の推論規則を SNK 推論規則に追加する。P_1, P_2 の具体的な関係は表 2 のとおりであり、そこでは各 P_1, P_2 に対応する推論規則の名前も記しておく。

表 1 Def

名前	P_1	P_2
$\subseteq Def$	$A \subseteq B$	$\forall x(x \in A \supset x \in B)$
$\cap Def$	$x \in A \cap B$	$x \in A \wedge x \in B$
$\cup Def$	$x \in A \cup B$	$x \in A \vee x \in B$
差 Def	$x \in A - B$	$x \in A \wedge x \notin B$
補 Def	$x \in A^c$	$x \notin A$
※ $\notin Def$	$x \notin A$	$\neg(x \in A)$
=set	$A = B$	$\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

※ A が集合を表す変数のときは、$x \notin A$ と $\neg(x \in A)$ を同一視してこれを SNK 推論規則としない。

表 2 追加すべき推論規則

名前	P_1	P_2
$dM1$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$
$dM2$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
$dis1$	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \wedge (Q \vee R)$
$dis2$	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \vee (Q \wedge R)$
$\wedge$の律	$(x \in A \wedge \notin B)$ $\wedge(x \in A \wedge \notin C)$	$x \in A \wedge$ $(x \notin B \wedge x \notin C)$

また、論理式 Q に現れる論理式 P_1 のいくつかを論理式 P_2 で置き換えた論理式を $Q[P_2/P_1]$ としたとき、表 1, 表 2 の P_1,P_2 の組に対して、

$$\frac{Q[P_2/P_1], \Gamma \to R}{Q, \Gamma \to R} \qquad \frac{\Gamma \to Q[P_2/P_1]}{\Gamma \to Q}$$

を追加する。この推論規則の名前は、P_1,P_2 に対する表 1, 表 2 の規則の名前に*をつけたものとする。

さらに、次の 9 つの推論規則も SNK 推論規則に追加する。

$$\frac{\Gamma \to A \subseteq B}{\Gamma \to A \cap C \subseteq B \cap C}\ (Inf1)$$

$$\frac{\Gamma \to B \subseteq C}{\Gamma \to A \cup B \subseteq A \cup C}\ (Inf2)$$

$$\frac{\Gamma \to P \vee (\neg P \vee Q \wedge R)}{\Gamma \to P \vee (Q \wedge R)}\ (Inf3)$$

$$\frac{\Gamma \to A \subseteq B \quad \Gamma \to A \subseteq C}{\Gamma \to A \subseteq B \cap C}\ (Inf4)$$

$$\frac{\Gamma \to A \subseteq C \quad \Gamma \to B \subseteq C}{\Gamma \to A \cup B \subseteq C}\ (Inf5)$$

$$\frac{x \in B \cap C \to x \in B \quad \to B \subseteq A \cup B}{x \in B \cap C \to x \in A \cup B}\ (Inf6)$$

$$\frac{P, \Gamma \to Q \quad \neg P, \Gamma \to Q}{\Gamma \to Q}\ (EM)$$

$$\frac{\neg P, \Gamma \to Q}{\Gamma \to P \vee Q}\ (RAA2)$$

$$\frac{Q, \Gamma \to R}{\neg P, P \vee Q, \Gamma \to R}\ (\text{選言三段論法})$$

表 2 とそれに*をつけた SNK 推論規則、最後に追加した 9 つの SNK 推論規則を追加すべき推論規則と呼ぶ。

3 実際の証明図の作成方法

この節では、手順 2 の実際の証明図の作成方法について述べる。作成方法は、次のとおりである。

- 上式が下式よりも簡単になる。
- 左辺に主論理式がある推論規則を優先する。

本研究では、18 冊の文献から抽出した証明文に対し、実際の証明図を作成した。

具体例を挙げる。文献 [1] における性質 1(右 $\subseteq$ 左) の証明文は以下である。ただし、他の実際の証明図と比較しやすいように、文献 [1] で書かれている $\bar{A}$ を A^c と置き換えている。

文献 [1] の証明文

次に、$A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ を示します。$x \in A^c \cap B^c$ とします。このとき $x \in A^c$ かつ $x \in B^c$ です。よって $x \notin A$ かつ $x \notin B$ なので $x \notin A \cup B$ になります。したがって $x \in (A \cup B)^c$ です。よって $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$ が成り立ちます。

この証明文から上の方法で作成した実際の証明図は、図 1 のとおりである。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{(\notin Def, \cup Def, dM1)}{x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B}}{x \notin A, x \notin B \to x \in (A \cup B)^c}\ (\text{補}\ Def)}{x \in A^c, x \in B^c \to x \in (A \cup B)^c}\ (\text{補}\ Def)}{x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c}\ (\cap Def)}{\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c}\ (\subseteq Def, \to \forall \supset)$$

図 1 文献 [1] の実際の証明図

図 1 の各推論規則の名前は、手順 3 で補った SNK 推論規則の名前の組として表現した。ただし、手順 6 の適切な証明図を作成しやすいように、$\to \wedge$ は明記していない。同様に、文献 [3] の証明文から上の方法で作成した実際の証明図を図 2 に示す。

一般には、1 つの証明に対して、複数の「実際の証明図」が存在する。例えば、文献 [1] の証明には少なくとも図 1, 図 3 の 2 通りの実際の証明図が存在する。

4 省略なしの証明図の作成方法

この節では、手順 3 の省略なしの証明図の作成方法について述べる。作成方法は、次のとおりである。

$$
\begin{array}{cl}
(\notin Def, \cup Def, dM1) & \\
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B & \\ \hline
x \in A^c, x \in B^c \to x \notin A \cup B & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \in A^c \cap B^c \to x \notin A \cup B & (\cap Def) \\ \hline
\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c & (\subseteq Def, \to\forall\supset, \text{補}\ Def)
\end{array}
$$

図 2 文献 [3] の実際の証明図

$$
\begin{array}{cl}
(\notin Def, \cup Def, dM1) & \\
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B & \\ \hline
x \in A^c, x \in B^c \to x \notin A \cup B & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \in A^c \cap B^c \to x \notin A \cup B & (\cap Def) \\ \hline
x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c & (\subseteq Def, \to\forall\supset)
\end{array}
$$

図 3 別の方法で作成した文献 [1] の実際の証明図

- 実際の証明図における推論規則のうち、SNK 推論規則以外のものを、次のいずれかの SNK 推論規則の組み合わせで表現する。
  ・$= set, \to \forall$,0 個か 2 個の Def の組み合わせ
  ・$\subseteq Def, \to \forall$,0 個か 1 個の $\to\supset$ の組み合わせ
  ・0 個以上の Def,0 個以上の $\to \wedge$,0 個以上の $\to \vee$,0 個か 1 個のそれ以外の規則の組み合わせ
- 方法 1 を使用した証明図の推論規則を補う際、すべての上式が公理になる推論規則は省略する。
- 方法 2 を使用した証明図は、始式を省略する。
- 推論規則を補う優先順位は、以下の小さい番号のものを図の下側に補う順位とする。
  1. $Def, Def*$
  2. 追加すべき推論規則
     $\wedge$ の律は方法 2 の場合のみ使用し、2 つ以上が適用できるときは全体が短くなるものを優先する。
  3. $\to \wedge, \to \vee$
- 上の 1,2,3 のそれぞれにおいて、右辺 (あるいは $\Leftrightarrow$ の右) を主論理式とする推論規則は、左辺 (あるいは $\Leftrightarrow$ の左) を主論理式とする推論規則を適用できないときのみに適用する。

具体例を挙げる。文献 [1](右 $\subseteq$ 左) と文献 [3](右 $\subseteq$ 左) の省略なしの証明図は、それぞれ図 4, 図 5 のとおりである。

なお、別の方法で作成した文献 [1](右 $\subseteq$ 左) の証明図 (図 3) は、図 5 に一致する。この意味で、文献 [1] と文献 [3] の証明図は同じと解釈できる。

5 実際の証明図の分類

この節では、手順 4、すなわち省略なしの証明図の分類について述べる。具体的には、性質 1,2,3 では、使われている推論規則の順番のみが違う証明図を、同じ分類に属すとした。例えば、図 4 と図 5 は同じ分類に属すことになる。その分類の正当性は、前節で述べたとおり、文献 [1] の実際の証明図の作り方を変えると、その省略なしの証明図が図 5 に一致することで保証できると考える。性質 4 では、性質 1,2,3 と同様の分類の仕方に加えて、分岐後の枝の部分のみが違う証明図も同じ分類に属すとした。

性質 1 の分類は、5 種類あり、それらは表 3 に示す性質をもつ。性質 2 の分類は、3 種類あり、それらは表 4 に示す性質をもつ。表 3 と表 4 より、性質 1 と性質 2 の分類が、証明すべき形およびその方法による分類と一致していることが分かる。性質 3 と性質 4 の分類は、(左 $\subseteq$ 右) と (右 $\subseteq$ 左) に分けて考えた。それぞれの分類の数と性質を、表 5 と表 6 に示す。

性質 1,2 の実際の証明図について方法 1 で証明をしていた証明図に着目した結果、全ての文献で (左 $\subseteq$ 右) と (右 $\subseteq$ 左) は全く同じ推論規則を使って証明をしていたことが分かった。一方、性質 3,4 の実際の証明図について方法 1 で証明をしていた証明図に着目した結果、(左 $\subseteq$ 右) と (右 $\subseteq$ 左) の証明方法が異なる文献が多いということが分かった。

$$
\begin{array}{cl}
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \wedge x \notin B & \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to \neg(x \in A \vee x \in B) & (dM1) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to \neg(x \in A \cup B) & (\cup Def) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B & (\notin Def) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to x \in (A \cup B)^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \in A^c, x \in B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\cap Def) \\ \hline
\to x \in A^c \cap B^c \supset x \in (A \cup B)^c & (\to\supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in A^c \cap B^c \supset x \in (A \cup B)^c) & (\to\forall) \\ \hline
\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c & (\subseteq Def)
\end{array}
$$

図 4 文献 [1] の省略なしの証明図

$$
\begin{array}{cl}
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \wedge x \notin B & \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to \neg(x \in A \vee x \in B) & (dM1) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to \neg(x \in A \cup B) & (\cup Def) \\ \hline
x \notin A, x \notin B \to x \notin A \cup B & (\notin Def) \\ \hline
x \in A^c, x \in B^c \to x \notin A \cup B & (\text{補}\ Def) \\ \hline
x \in A^c \cap B^c \to x \notin A \cup B & (\cap Def) \\ \hline
x \in A^c \cap B^c \to x \in (A \cup B)^c & (\text{補}\ Def) \\ \hline
\to x \in A^c \cap B^c \supset x \in (A \cup B)^c & (\to\supset) \\ \hline
\to \forall x(x \in A^c \cap B^c \supset x \in (A \cup B)^c) & (\to\forall) \\ \hline
\to A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c & (\subseteq Def)
\end{array}
$$

図 5 文献 [3] の省略なしの証明図

6 適切な証明図の作成方法

この節では、手順 6 の適切な証明図の作成方法について述べる。具体的には、前節の各分類に対し次のように

表 3 性質 1 の分類

分類/文献数	証明方法
分類 1.1/3 冊	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ を方法 1 で示す
分類 1.2/2 冊	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ を方法 1 で示す
分類 1.3/1 冊	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ を方法 2 で示し、$x\in A^c\Leftrightarrow x\in X-A$ を用いる
分類 1.4/5 冊	$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$ を方法 2 で示し、$x\in A^c\Leftrightarrow x\notin A$ を用いる
分類 1.5/1 冊	$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$ を方法 2 で示す

表 4 性質 2 の分類

分類/文献数	証明方法
分類 2.1/1 冊	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ を方法 1 で示す
分類 2.2/1 冊	$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$ を方法 2 で示す
分類 2.3/2 冊	$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ を方法 2 で示す

作成する。

1. 「省略なしの証明図に現れる推論規則」の組み合わせのうち、実際の証明図に用いられているものを抽出する。
2. 1 で抽出した組み合わせのうち、全体の半数以上で使われていたものを抽出する。
3. 2 で抽出した組み合わせの中で、共通の推論規則が含まれている 2 つ以上の組み合わせがあった場合、それらの組み合わせを合併した組み合わせを採用する。
4. 3 で採用した組み合わせをつなげてできる証明図を、適切な証明図とする。

この方法で、適切な証明図が一意に定まる。

具体例を挙げる。分類 1.2(右 $\subseteq$ 左), 分類 3.1 の適切な証明図は、それぞれ図 6, 図 7 である。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(\notin Def,\cup Def,dM1)}{x\notin A,x\notin B\to x\notin A\cup B}}{x\in A^c,x\in B^c\to x\notin A\cup B}\,(\text{補}\,Def)}{x\in A^c\cap B^c\to x\notin A\cup B}\,(\cap Def)}{x\in A^c\cap B^c\to x\in(A\cup B)^c}\,(\text{補}\,Def)}{\to A^c\cap B^c\subseteq(A\cup B)^c}\,(\subseteq Def,\to\forall,\to\supset)$$

図 6 分類 1.2(右 $\subseteq$ 左) の適切な証明図

表 5 性質 3 の分類

分類/文献数	証明方法
(左 $\subseteq$ 右)	
分類 3.1/3 冊	$dis1$ を用いる
分類 3.2/4 冊	$\vee\to$ を用いる
分類 3.3/4 冊	$\Leftrightarrow$ を用いる
(右 $\subseteq$ 左)	
分類 3.1′/3 冊	$dis1$ を用いる
分類 3.2′/1 冊	$\vee\to$ を用いる
分類 3.3′/1 冊	$Inf1$,$Inf5$ を用いる
分類 3.4′/4 冊	$\Leftrightarrow$ を用いる

表 6 性質 4 の分類

分類/文献数	証明方法
(左 $\subseteq$ 右)	
分類 4.1/7 冊	$\vee\to$ を用いる
分類 4.2/1 冊	$Inf2$,$Inf4$ を用いる
分類 4.3/1 冊	$dis2$ を用いる
分類 4.4/2 冊	$\Leftrightarrow$ を用いる
(右 $\subseteq$ 左)	
分類 4.1′/4 冊	EM, 選言三段論法を用いる
分類 4.2′/2 冊	$RAA2$, 選言三段論法を用いる
分類 4.3′/1 冊	$Inf3$,$dis2$ を用いる
分類 4.4′/2 冊	$dis2$ を用いる
分類 4.5′/2 冊	$\Leftrightarrow$ を用いる

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{(dis1)}{x\in A,x\in B\vee x\in C\to(x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)}}{x\in A,x\in B\vee x\in C\to x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}\,(*2)}{x\in A,x\in B\cup C\to x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}\,(\cup Def)}{x\in A\cap(B\cup C)\to x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)}\,(\cap Def)}{\to A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)}\,(*1)$$

*1 は $\subseteq Def,\to\forall,\to\supset$ を示し、*2 は $\cup Def,\cap Def*$ を示す。

図 7 分類 3.1 の適切な証明図

参考文献

[1] ゲアリー・チャートランド 他:『証明の楽しみ : 数学を使いこなす練習をしよう』. ピアソン・エデュケーション, 東京, 2004.

[2] 佐々木克巳:「シークエント体系の証明図から実証明を作る方法」,『アカデミア 情報理工編 第 11 巻』. 2011, pp. 35–54.

[3] 和田秀三:『教養数学概論』. サイエンス, 東京, 1982.