在庫保有制限のある多品目三段階在庫管理モデルに関する研究

M2008MM004　Bao　Wenli
指導教員　澤木　勝茂

1　はじめに

本論文では, 総期待利益を最大にするために, 各段階の期首の適正在庫量を決定する在庫保有制限のある多品目三段階在庫モデルを考察する. 本論文の三段階システムは図 1 のように, 3 段階をメーカー, 物流センター, 小売店とする.

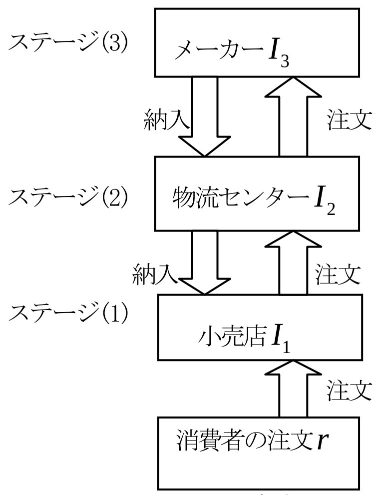

図 1.1　三段階在庫システム

2 章では, グオウェイホンらによる[3]のモデルを参考し, 単位期待利益を導入し, 適正在庫量を求める一品目三段階在庫モデルの定式化について論述する. また, 注文量の分布が正規分布のとき, 適正在庫量を求める具体例を挙げる. 3 章では, 増井[5]のモデルに基づき, 単位期待利益比較関数を考えることによって, 在庫保有制限のある多品目三段階在庫モデルを定式化し, 適正在庫量を導出する. また, 注文量の分布が一様分布のとき, 二品目三段階在庫システムにおいて, 数値例を用いて, 具体的に適正在庫量を計算する.

2 三段階在庫モデルの定式化および数値例

本章では, 期待利益を最大にするために, 期首の適正在庫量を求める一品目三段階在庫モデルの定式化をおこなう. 単位期待利益を導入して, 適正在庫量を求め, 数値例で定式化したモデルを確認する.

2.1　三段階在庫モデルの前提条件

まず, モデルの概念は図 2 のようになる.

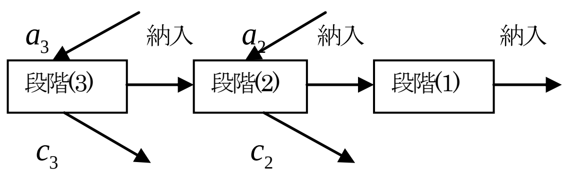

図2　モデルの概念

ここでは, 増井[4]のモデルにより, 三段階とする在庫モデルの前提条件を説明する.

(1) 注文はステージ(1)に対する. 注文量r は, ある確率密度関数 $f(r)$ にしたがうものとする.

(2) ステージ(i-1)で品切れが起こると, 不足分はステージ(i)の払いだしを受ける. この間, 一部はキャンセルされ, 不足分に対する払いだしを受けるものの割合をa_i とし, $a_{i+1} < a_i$,

$a_1 = 1,\ a_4 = 0$ とする.

(3) 各費用について次のようで示す. ここで, i＝1, 2, 3である.

p を単価とし, I_i をステージ(i)の在庫量(決定変数)とし,

C_L を品切れ損失費用とし, l_i をステージ(i)の売れ残り損失費用とし, c_i をステージ(i)の緊急発注, 輸送費用とし, h_i をステージ(i)の保管費用とする.

在庫モデルは以上を用いて, 利益(売上高—費用)を最大にする各段階の適正在庫量I_i を求める.

2.2 三段階在庫モデルの定式化

ステージ(1) ~ (k-1)の在庫がすべて払いだされ, ステージ(k)の在庫を払いだしが起こるとき,

$$\sum_{i=1}^{k-1} I_i / a_i < r < \sum_{i=1}^{k} I_i / a_i, (a_1 = 1, a_4 = 0)$$

が成り立つ.

$$x_k = \sum_{i=1}^{k} I_i / a_i, (k = 1, 2, 3) \tag{1}$$

とおくと, 上式の条件は$x_{k-1} \le r \le x_k$ となる. このときの利益$G_k(r)$ は次のようになる.

$$G_k(r) = p\{\sum_{i=1}^{k-1} I_i + (r - x_{k-1})a_k\} - [\{r - (r - x_{k-1})a_k - \sum_{i=1}^{k-1} I_i\}C_L + \{I_k - (r - x_{k-1})a_k\}l_k + \sum_{i=k+1}^{3} I_i l_i + \sum_{i=1}^{k-1} I_i c_i + (r - x_{k-1})a_k c_k + \sum_{i=1}^{3} I_i h_i]$$

期待利益は次のようになる.

$$E(G)=\sum_{k=1}^{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k}G_k(r)f(r)dr\ . \tag{2}$$

期待利益をI_iについて微分して,

$$\frac{\partial}{\partial I_i}E(G)=\frac{\partial}{\partial I_i}\sum_{k=1}^{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k}G_k(r)f(r)dr$$

$$=\sum_{k=1}^{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\frac{\partial}{\partial I_i}G_k(r)f(r)dr.$$

$$\frac{\partial}{\partial I_i}E(G)=0 \tag{3}$$

とおく. また, $y_k=\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(r)dr$ とおくと,

$$\sum_{k=1}^{4}y_k=\sum_{k=1}^{4}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(r)dr=1. \tag{4}$$

$$1-\sum_{k=1}^{i}y_k=z_i \tag{5}$$

とおくと, (3)式と(4)式の連立方程式を解いて,

$$z_i=\frac{a_i(l_i+h_i)-a_{i+1}(l_{i+1}+h_{i+1})}{a_i(p+C_L-c_i+l_i)-a_{i+1}(p+C_L-c_{i+1}+l_{i+1})}. \tag{6}$$

これより, y_k, x_k, I_i を求めることができる.

2.3 単位期待利益関数の導入

前節の(6)式は$z_i=z_{i,i+1}$とし, 変形すると,

$$g_i(z_{i,i+1})=a_i\{(p-c_i)z_{i,i+1}-(1-z_{i,i+1})l_i-h_i\}$$
$$-(1-a_i)z_{i,i+1}C_L=-(1-a_{i+1})z_{i,i+1}C_L$$
$$+a_{i+1}\{(p-c_{i+1})z_{i,i+1}-(1-z_{i,i+1})l_{i+1}-h_{i+1}\}$$

とおき, $g_i(z_{i,i+1})$について考える. $z_{i,i+1}$はステージ(i)の在庫が払いだされる確率である.

確率量zをステージ(i)で保有した場合, 品切れ損失を除く期待利益は,

$$pz-c_iz-(1-z)l-h_i$$

となる. 品切れ損失費用を引くと,

$$a_i\{(p-c_i)z-(1-z)l_i-h_i\}-(1-a_i)zC_L$$

となる. これを$g_i(z)$とおくと, $g_i(z)$はステージ(i)の単位期待利益関数であることが分かる. 図2は単位期待利益関数を示す. ここで, $a_{i+1}<a_i$である.

図2より, $g_i(z)$と$g_{i+1}(z)$（$0\le z\le 1$）の交点を$z_{i,i+1}$とすれば, $z_{1,2},z_{2,3},z_{3,4}$が求められる. さらに, y_i, x_i, I_iが求められる.

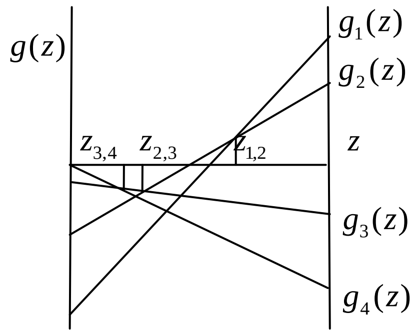

図2 単位期待利益関数

2.4 数値例

例では, ここで, 密度関数$f(r)$を正規分布とし, p,C_L, a_i, l_i, c_i, h_iの数値が与えられる.

この場合, 各段階の単位期待利益関数$g_i(z)$より, $z_{i,i+1}$, y_i, x_i, I_iが求められる. 各段階に保有制限がある場合, 両側の段階で補えばよいことが分かる. また, 在庫保有制限のある場合, 明らかに総期待利益が少ないことが分かる.

3 在庫保有制限のある多品目三段階在庫モデルの定式化および数値例

本章では, 在庫保有制限のある多品目三段階在庫モデルを考察する. 単位期待利益比較関数を導入し, 期待利益分析を行って, 適正在庫量を求め, 数値例で定式化したモデルを確認する.

3.1 在庫保有制限のある多品目3段階在庫モデル

ここで, ステージ(1), ステージ(2), ステージ(3)の在庫保有制限K_1, K_2, K_3が存在するとする.

同じように,

$$x_k^m=\sum_{i=1}^{k}I_i^m/a_i^m,(m=1,\cdots,M)$$

とおくと, ステージ(1)からステージ(k−1)までの在庫がすべて払い出され, ステージ(k)の在庫を払いだすとき, 注文がr^mに

対する利益$G_k{}^m(r^m)$は

$$G_k{}^m(r^m) = p^m\{\sum_{i=1}^{k-1} I_i{}^m + (r^m - x_{k-1}{}^m)a_k{}^m\}$$

$$-[\{r^m - (r^m - x_{k-1}{}^m)a_k{}^m - \sum_{i=1}^{k-1} I_i{}^m\}C_L{}^m$$

$$+\{I_k{}^m - (r^m - x_{k-1}{}^m)a_k{}^m\}l_k{}^m + \sum_{i=k+1}^{3} I_i{}^m l_i{}^m$$

$$+\sum_{i=1}^{k-1} I_i{}^m c_i{}^m + (r^m - x_{k-1}{}^m)a_k{}^m c_k{}^m + \sum_{i=1}^{3} I_i{}^m h_i{}^m].$$

$z_i{}^m$とはある在庫量$I_i{}^m$を保有したとき, そのすべての在庫量が払いだされてしまう注文が発生する確率である. よって,

$$z_i{}^m = \int_{x_i{}^m}^{\infty} f^m(r^m)dr^m .$$

注文が発生する確率$z_i{}^m$のものをステージ(i) (i=1, 2, 3)で保有した場合と保有しない場合(i=4)の単位期待利益関数は次のようになる.

$$g_i{}^m(z_i{}^m) = \{a_i{}^m(p^m - c_i{}^m + l_i{}^m + C_L{}^m) - C_L{}^m\} z_i{}^m - a_i{}^m(l_i{}^m + h_i{}^m). \quad (7)$$

$$R_{i,4}{}^m(z_i{}^m) = g_i{}^m(z_i{}^m) - g_4{}^m(z_i{}^m) \quad (8)$$

を単位期待利益比較関数と定義する.

在庫保有制限を考慮しない場合の最適在庫量を$I_i{}^{m*}$で示すと,

$$R_{1,4}{}^m(I_1{}^{m*}) = R_{2,4}{}^m(I_1{}^{m*})$$
$$R_{2,4}{}^m(I_2{}^{m*}) = R_{3,4}{}^m(I_2{}^{m*})$$
$$R_{3,4}{}^m(I_3{}^{m*}) = 0$$

が成立することより, 最適在庫量を求められる.

保有制限に対し, 各品目の 1 単位当たりの大きさをτ^mで示すと, 在庫保有制限のあるとき, 次の(a), (b), (c)に分けて考える.

(a) ステージ(1)のみ保有制限を超える場合

$\sum_{m=1}^{M} \tau^m I_1{}^m = K_1$ とする.

$R_{14}{}^m(I_1{}^m) - R_{24}{}^m(I_1{}^m) = g_1{}^m(I_1{}^m) - g_2{}^m(I_1{}^m)$ より,

$$R_i{}^m(z^m) = g_i{}^m(z^m) - g_{i+1}{}^m(z^m)$$

と定義すると, 増井[5]の 2 段階モデルにより,

$$\frac{R_1{}^1(I^1)}{\tau^1} = \frac{R_1{}^2(I^2)}{\tau^2} = \cdots = \frac{R_1{}^M(I^M)}{\tau^M} \quad (9)$$

が成立する.

(9)式より, 確率量$z_i{}^m$に対し, ステージ(1)で保有した場合とステージ(2)で保有した場合の保有制限当たりの期待利益の差がすべての品目で等しくなっている.

(b) ステージ(1)とステージ(2)ともに保有制限を超える場合

$\sum_{m=1}^{M} \tau^m I_1{}^m = K_1, \sum_{m=1}^{M} \tau^m I_2{}^m = K_2$ とする. 在庫量$I_1{}^{m1}$は$\Delta I_1{}^m$を増減して, 期待利益の増分は

$$E(G) = \sum_{m=1}^{M} [\int_0^{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m}} R_{14}{}^m(r^m)dr^m$$
$$+\int_{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m}}^{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m + I_2{}^m / a_2{}^m}} R_{24}{}^m(r^m)dr^m]$$

ここで, $\sum_{m=1}^{M} \tau^m \Delta I_1{}^m = 0$.

$E(G)$を$\Delta I_1{}^m$, $I_2{}^m$で微分して, 0 とおき, 整理することより, (10)式が得る.

$$\frac{R_1{}^1(x_1{}^1) + R_{24}{}^1(x_2{}^1)}{\tau^1} = \cdots = \frac{R_1{}^M(x_1{}^M) + R_{24}{}^M(x_2{}^M)}{\tau^M}$$
$$\frac{R_{24}{}^1(x_2{}^1)}{a_2{}^1\tau^1} = \cdots = \frac{R_{24}{}^M(x_2{}^M)}{a_2{}^M\tau^M} \quad (10)$$

(10)式より, 確率量$z_i{}^m$に対し, (i)−(ステージ(1)で保有した場合とステージ(2)で保有した場合の利益の差＋ステージ(2)で保有した場合と保有しない場合の利益の差)の保有制限単位当たりの大きさがすべての品目で等しくなっている. (ii)−ステージ(2)で保有した場合と保有しない場合の保有制限単位当たりの利益の差がすべての品目で等しくなっている(ただし, ステージ(2)においてはバックオーダ率a_2を考慮しなければならない).

(c) ステージ(1)とステージ(2)とステージ(3)ともに保有制限を超える場合

$$\sum_{m=1}^{M}\tau^m I_1{}^m = K_1, \sum_{m=1}^{M}\tau^m I_2{}^m = K_2, \sum_{m=1}^{M}\tau^m I_3{}^m = K_3$$ とする. (b)の場合と同様に在庫量 $I_1{}^{m1}$ は $\Delta I_1{}^m$ を増減し, $I_2{}^{m1}$ は $\Delta I_2{}^m$ を増減して, 期待利益の増分は

$$E(G) = \sum_{m=1}^{M}[\int_0^{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m}} R_{14}{}^m(r^m)dr^m$$
$$+\int_{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m}}^{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m+I_2{}^m/a_2{}^m+\Delta I_2{}^m}} R_{24}{}^m(r^m)dr^m$$
$$+\int_{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m+I_2{}^m/a_2{}^m+\Delta I_2{}^m}}^{I_1{}^{m1+\Delta I_1{}^m+I_2{}^m/a_2{}^m+I_3{}^m/a_3{}^m+\Delta I_2{}^m}} R_{34}{}^m(r^m)dr^m]$$

ここで, $\sum_{m=1}^{M}\tau^m\Delta I_1{}^m = 0$, $\sum_{m=1}^{M}\tau^m\Delta I_2{}^m = 0$.

$E(G)$ を $\Delta I_1{}^m$, $\Delta I_2{}^m$, $I_3{}^m$ で微分して, 0 とおき, 整理することにより, (11)式が得る.

$$\frac{R_1{}^1(x_1{}^1)+R_2{}^1(x_2{}^1)+R_3{}^1(x_3{}^1)}{\tau^1} = \cdots$$
$$= \frac{R_1{}^M(x_1{}^M)+R_2{}^M(x_2{}^M)+R_3{}^M(x_3{}^M)}{\tau^M}$$
$$\frac{R_2{}^1(x_2{}^1)+R_3{}^1(x_3{}^1)}{a_2{}^1\tau^1} = \cdots = \frac{R_2{}^M(x_2{}^M)+R_3{}^M(x_3{}^M)}{a_2{}^M\tau^M}$$
$$\frac{R_3{}^1(x_3{}^1)}{a_3{}^1\tau^1} = \cdots = \frac{R_3{}^M(x_3{}^M)}{a_3{}^M\tau^M} \qquad (11)$$

(11)式より, 確率量 $z_i{}^m$ に対し, (i)-(ステージ(1)で保有した場合とステージ(2)で保有した場合の利益の差+ステージ(2)で保有した場合とステージ(3)で保有した場合の利益の差+ステージ(3)で保有した場合と保有しない場合の利益の差)の保有制限単位当たりの大きさがすべての品目で等しくなっている. (ii)-(ステージ(2)で保有した場合と在ステージ(3)で保有した場合の利益の差+ステージ(3)で保有した場合と保有しない場合の利益の差)の保有制限単位当たりの大きさがすべての品目で等しくなっている(ただし, ステージ(2)においてはバックオーダ率 a_2 を考慮しなければならない). (iii)-ステージ(3)で保有した場合と保有しない場合の保有制限単位当たりの利益の差がすべての品目で等しくなっている(ただし, ステージ(3)においてはバックオーダ率 a_3 を考慮しなければならない).

3.2　注文量分布が一様分布の場合の数値例

例として, 二品目三段階在庫モデルを考える. 注文量分布を一様分布として, $f^m(r^m), \tau^m, p^m, C_L{}^m, a_i{}^m, l_i{}^m, c_i{}^m$, $h_i{}^m$ (m=1,2)が与えられ, この場合, 単位期待利益関数と期待利益比較関数を求めることにより, 最適在庫量が求められる. 在庫保有制限がある場合には, 保有制限条件と(9)式, (10)式, (11)式より, 適正在庫量 $I_1{}^{m**}$, $I_2{}^{m**}$, $I_3{}^{m**}$ が求められる. また, 期待利益も求められる.

以上より, 在庫保有制限のある多品目三段階モデルにおいて, 明らかに, 一段階から, つぎつぎと上位段階までに在庫保有制限のある場合, 期待利益がどんどん少なくなってくることが分かる. 適正在庫量については, (a)の場合−ステージ(2)の適正在庫量が増えた. (b)の場合−ステージ(3)の適正在庫量が明らかに多くなった. (c)の場合−ステージ(1) ~ (3)の適正在庫量が明らかに少なくなった.

4 おわりに

本論文では, 増井[5]のモデルに基づき, ステージ数を三段階としたモデルの適正在庫量を決定する新たな在庫モデルについて考察した. 第2章では, 一品目三段階在庫モデルの適正在庫量を求める一般解法を示した. 第3章では, 在庫保有制限のある多品目三段階在庫モデルの定式化をおこなった. 今後の発展として, 多期間分岐型三段階モデルに拡張することによって実際の在庫システムに適用する在庫モデルを構築することは重要な課題となる. また, サプライチェーンにおいては, 適正在庫量を考察する課題以外に, サービス水準に関する消費者の注文の分布について考察することも重要な課題である.

参考文献

[1] F. Chen: “Optimal Policies for Multi-Echelon Inventory Problems with Batch Ordering”, *Operations Research*, Vol. 48, No. 3, pp. 376-389 (2000).

[2] G. V. Houtum, A. Scheller-Wolf and Jinxin Yi: “Optimal Control of Serial, Multi-Echelon Inventory/Production Systems with Periodic Batching”, *Operations Research, Beta Working Paper*, Vol. 1, No. 106, pp. 1-39 (2003).

[3] グオウェイホン, 森雅夫, 園川隆夫, 秋庭雅夫: バックオーダを考慮した多段階流通・在庫モデルに関する研究, 日本経営工学会誌, Vol. 38, No. 5, pp. 306-313 (1987).

[4] 増井忠幸 : n段直列型在庫モデルの感度分析—多段階在庫モデルの一考察(第3報), 日本経営工学会誌, Vol. 34, No. 2, pp. 112-118 (1983).

[5] 増井忠幸 : 在庫保有制限のある2段階多品目在庫管理モデルの研究, 日本経営工学会誌, Vol. 40, No. 2, pp. 80-85 (1989).