

# 二重指数型変数変換による二次元無限積分

M2006MM018 水野 雄太

指導教員 杉浦 洋

## 1 はじめに

一変数緩減少関数の無限積分では二重指数関数型公式 (DE 公式) が有効である [1]. しかしそれを二変数関数の無限積分に直積型で用いると大幅にその効果が落ちる. 積分公式を改良し, 二変数関数の無限積分を高精度で行うのが本研究の目的である. 本研究で扱う手法を紹介する.

- 直積 DE 変換公式  
直積型に二重指数型変数変換公式を適用し, 無限台形則を用いて直積型で積分する.
- 非直積 DE 変換公式  
非直積型に二重指数型変数変換公式を適用し, 無限台形則を用いて直積型で積分する.
- 極座標変数変換・台形則  
極座標変換した後, 角度方向は台形則, 動径方向は二重指数型変数変換公式を適用し無限積分に変換した後, 無限台形則を用いて積分する.
- 極座標変数変換・Lagrange-Bessel 積分公式  
極座標変数変換・台形則と同様だが, 動径方向に無限台形則は用いず, Lagrange-Bessel 積分公式を適用する.

## 2 一変数における DE 公式

### 2.1 半無限積分と無限積分

一変数関数  $f$  の無限積分に対する無限台形則は

$$I^h f = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

無限区間上の台形則は無限和なので, 実際の計算では適当な項数で打ち切って有限和

$$T_h^* = h \sum_{k=-N}^N f(kh)$$

として計算をする. 区間  $[a, b]$  上の定積分については適当な変数変換  $x = \varphi(t)$  で

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

と急減少な関数の無限積分に変換してから無限台形則を用いる. 被積分関数  $f(x)$  を二重指数関数的に減衰する被積分関数  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  に変換する特殊な変数変換を二重指数型変数変換という.

二重指数関数的に減衰するとは  $f(\varphi(t))\varphi'(t)$  がある定数

$\alpha, \beta > 0$  に対し

$$|f(\varphi(t))\varphi'(t)| = O(e^{-\alpha \exp(\beta|t|)}), \quad |t| \rightarrow \infty$$

を満たすものをいう.

これを用いると被積分関数は急減少関数に変換され, 数値積分の際により少ない標本点で高精度近似が可能となる. 変数変換に用いる二重指数型変数変換は次のものである.

- 半無限積分  $[a, b] = [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right), \\ \varphi'(t) &= \frac{\pi}{2} (\cosh t) \exp\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right). \end{aligned} \quad (1)$$

- 無限積分  $[a, b] = (-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right), \\ \varphi'(t) &= \frac{\pi}{2} (\cosh t) \cosh\left(\frac{\pi}{2} \sinh t\right). \end{aligned} \quad (2)$$

### 2.2 二重指数型変数変換による被積分関数の変化

図 1 は

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

の無限積分に対してそのままの被積分関数  $f(x)$  と, 二重指数型変数変換 (式 2) を適用した後の被積分関数  $g(x)$  をグラフとして描いたものである.

$f(x)$  に比べ  $g(x)$  は  $x \rightarrow \pm\infty$  について, 0 への収束が

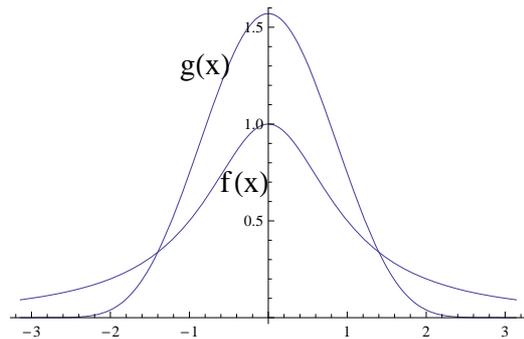


図 1  $f(x)$  と  $g(x)$

速い. これは無限台形則が少ない項数で打ち切れ効果的である.

### 2.3 周期関数の 1 周期積分

周期  $2\pi$  の周期関数  $f$  の  $m$  点台形則による近似は

$$T_m f = \frac{2\pi}{m} \sum_{l=0}^{m-1} f\left(\frac{2\pi l}{m}\right) \cong \int_0^{2\pi} f(x) dx = If.$$

$f$  が解析的ならば実数  $r(0 \leq r < 1)$  が存在し

$$|T_m f - If| = O(r^m)$$

である [2].

### 3 二変数関数の無限積分

二変数関数  $f(x, y)$  の無限積分,

$$If = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

これを二重指数型変数変換し計算する.

#### 3.1 直積 DE 変換公式

刻み幅  $h$ , 積分範囲  $(-mh \leq x \leq mh)$ ,  $(-mh \leq y \leq mh)$  で各次元に DE 公式を用いると

$$I_m^h f = h^2 \sum_{k=-m}^m \sum_{l=-m}^m f(\varphi(hk), \varphi(hl)) \varphi'(hk) \varphi'(hl)$$

となる. 変数変換は無有限区間積分なので式 2 である.

#### 3.2 極座標変数変換・台形則

二変数関数  $f(x, y)$  を極座標変数変換した

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

を角度方向と動径方向に分けて考える. 角度方向は台形則で計算し, 動径方向の積分には半無限積分の変数変換 (式 1) による DE 公式を用いる. 動径方向は刻み幅  $h$ , 積分範囲  $(-mh \leq x \leq mh)$ , 角度方向は  $n$  点台形則 (1 周期  $2\pi$  を  $n$  等分する台形則) で近似計算する.

$$I_{m,n}^h f = \frac{2\pi h}{n} \sum_{k=1}^n \sum_{l=-m}^m f(\varphi(hl) \cos \frac{2\pi k}{n}, \varphi(hl) \sin \frac{2\pi k}{n}) \times \varphi'(hl) \varphi'(hl)$$

#### 3.3 直積 DE 変換公式と極座標変数変換・台形則の比較

直積 DE 変換公式と極座標変数変換・台形則で,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4+y^4} dx dy = \pi K\left(\frac{1}{2}\right) = 5.824747385416855 \dots$$

を近似計算する. ここで  $K(\frac{1}{2})$  は第一種完全楕円積分である. 計算には Mathematica を用いるので, 丸め誤差を考慮し, 絶対誤差  $10^{-14}$  を十分な精度と考える.

##### ● 直積 DE 変換公式

原点を中心とした正方形の形に標本点集合を取り, その正方形を大きくしながら標本点集合の関数値の和が  $10^{-15}$  以下になるまで計算を行うプログラムを使用する.

刻み幅	標本点数	絶対誤差
0.10	4225	$6.2125 \times 10^{-7}$
0.08	6561	$5.70595 \times 10^{-8}$
0.06	11881	$1.81341 \times 10^{-9}$
0.04	25921	$5.75138 \times 10^{-12}$
0.02	100489	$7.09105 \times 10^{-16}$

##### ● 極座標変数変換

プログラムは動径  $r$  を増加させながら半径  $r$  の円の上にある標本点を順に考えていくものを使用する. 直積 DE 変換公式と同様に標本点集合の関数値の和が  $10^{-15}$  以下になるまで計算を行う. 角度方向は  $n$  点台形則である.

刻み幅	$n$	標本点数	絶対誤差
0.15	36	1620	$2.7952 \times 10^{-7}$
0.15	40	1800	$4.6404 \times 10^{-8}$
0.15	44	1980	$6.7597 \times 10^{-9}$
0.15	48	2160	$1.9525 \times 10^{-9}$
0.15	52	2340	$5.1931 \times 10^{-10}$
0.15	56	2520	$7.5581 \times 10^{-10}$
0.15	60	2700	$7.1677 \times 10^{-10}$
0.15	64	2880	$7.2323 \times 10^{-10}$
0.15	68	3060	$7.2212 \times 10^{-10}$
0.15	72	3240	$7.2226 \times 10^{-10}$

0.10	36	2412	$2.8024 \times 10^{-7}$
0.10	40	2680	$4.5682 \times 10^{-8}$
0.10	44	2948	$7.4819 \times 10^{-9}$
0.10	48	3216	$1.2302 \times 10^{-9}$
0.10	52	3484	$2.0287 \times 10^{-10}$
0.10	56	3752	$3.3603 \times 10^{-11}$
0.10	60	4020	$5.5422 \times 10^{-12}$
0.10	64	4288	$9.3702 \times 10^{-13}$
0.10	68	4556	$1.3056 \times 10^{-13}$
0.10	72	4824	$9.8587 \times 10^{-14}$

0.08	36	2916	$2.8024 \times 10^{-7}$
0.08	40	3240	$4.5681 \times 10^{-8}$
0.08	44	3564	$7.4818 \times 10^{-9}$
0.08	48	3888	$1.2302 \times 10^{-9}$
0.08	52	4212	$2.0301 \times 10^{-10}$
0.08	56	4536	$3.3674 \times 10^{-11}$
0.08	60	4860	$5.5582 \times 10^{-12}$
0.08	64	5184	$9.0860 \times 10^{-13}$
0.08	68	5508	$1.4921 \times 10^{-13}$
0.08	72	5832	$3.0198 \times 10^{-14}$

極座標変数変換・台形則の方が少ない標本点数で  $10^{-14}$  に達している.

#### 3.4 直積 DE 変換公式の低性能の原因

直積 DE 変換公式で変換後の被積分関数の等高線は図 2 のようになっている. 等高線から原点を中心に均等に DE 公式の効果が表れていないことがわかる. 直積 DE 変換公式では正方形の形の標本点集合を取っていくので図 2 の 4 箇所飛び出た部分がプログラムの終了を引き伸ばし, 標本点数を増やしている.

### 4 非直積 DE 変換公式

直積 DE 変換公式の低性能の原因を踏まえ改良をする.  $x, y$  について二重指数型変数変換するのではなく,

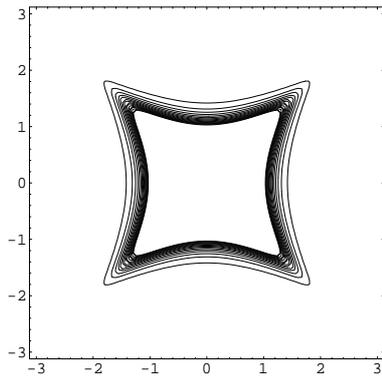


図2 直積 DE 変換した関数の等高線

原点からの距離  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  に対して二重指数型変数変換する．すると二変数関数の無限積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\varphi(r) \frac{x}{r}, \varphi(r) \frac{y}{r}\right) \times \frac{\varphi(r) \varphi'(r)}{r} dx dy$$

と変形される．変数変換は式 2 である．

#### 4.1 等高線図と数値実験

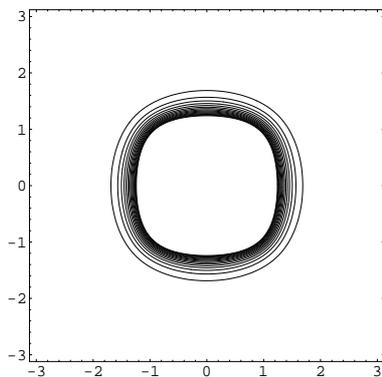


図3 非直積 DE 変換した関数の等高線

図3は非直積 DE 変換公式を適用をした被積分関数の等高線を描いたものである．二重指数型変数変換を非直積型に適用することによって図2にあった4箇所飛び出た部分はなくなった．以下が数値実験の結果である．

刻み幅	標本点数	絶対誤差
0.10	4225	$3.5829 \times 10^{-9}$
0.09	5041	$2.7612 \times 10^{-11}$
0.08	6561	$7.4857 \times 10^{-11}$
0.07	8281	$4.8050 \times 10^{-13}$
0.06	11449	$9.7699 \times 10^{-15}$

直積 DE 変換公式と比較すると精度はかなり向上しているが、依然として極座標変数変換・台形則とは差がある．

#### 4.2 非直積 DE 変換公式の低性能の原因

等高線図3を見てわかるように積分対象は円形である．正方形の形に標本点を取るという非直積 DE 変換公式のプログラムの特性上、四隅の標本点の分だけ標本点数が増えてしまう．それに対し極座標変数変換・台形則は円形に標本点を取ることができるのでこのテスト関数の場合、標本点の無駄が少ない．

### 5 Lagrange-Bessel 積分公式

極座標変数変換・台形則の精度を更に向上させる手段を考える．

Lagrange-Bessel 積分公式 (以下 LB 公式) とは 1996 年に緒方・杉原によって提案された公式で、Bessel 関数の零点を標本点に持つように Lagrange 補間することにより得られた積分公式である [3]．奇関数の半無限積分において有効で、台形則と同程度の精度を持つ．

極座標変数変換後の角度方向の積分

$$\int_0^{2\pi} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r d\vartheta$$

は  $r$  について奇関数であるから、その動径方向の半無限積分には LB 公式が有効である．極座標変数変換と台形則、極座標変数変換と LB 公式のそれぞれの組み合わせで精度比較する．0 位、1 位、2 位... の LB 公式がそれぞれ存在するが、いずれも同程度の精度となるため本論分では 0 位の LB 公式のみを用いる．

0 位の LB 公式は

$$Q^0(f, h) = h \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} f\left(\frac{h j_{0k}}{\pi}\right) \frac{2}{\pi j_{0k} (J_1(j_{0k}))^2}$$

で与えられる．ここで  $J_n(x)$  は  $n$  位の Bessel 関数、 $j_{nk}$  はその  $k$  番目の零点、 $h$  は任意で補間点の間隔を変化させるためのパラメータとする．(Bessel 関数の零点  $j_{nk}$  が  $k \rightarrow \infty$  において間隔  $h$  で分布する．)

#### 5.1 一変数関数における数値実験

一変数関数の奇関数を半無限区間で積分する．

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2}$$

を近似計算する．

台形則は急減少関数の無限積分に対して有効な公式であるため、半無限積分に適用する際には変数変換 (式 1) を用いて無限区間の積分に変換しなければならない．一方、LB 公式に用いる変数変換は (式 2) である．LB 公式の数値実験結果は以下の通りである．

パラメータ $h$	標本点数	絶対誤差
2.0	9	$5.53829 \times 10^{-5}$
2.5	11	$9.76067 \times 10^{-7}$
3.0	13	$1.45819 \times 10^{-8}$
3.5	15	$1.94630 \times 10^{-10}$
4.0	17	$2.39266 \times 10^{-12}$

台形則の数値実験結果は以下の通りである。

刻み幅	標本点数	絶対誤差
2.0	18	$1.67970 \times 10^{-6}$
2.5	22	$1.89647 \times 10^{-8}$
3.0	26	$1.97425 \times 10^{-10}$
3.5	30	$1.96837 \times 10^{-12}$
4.0	34	$1.82077 \times 10^{-14}$

このデータを見比べると同程度の標本点数では LB 公式が台形則よりも高精度な積分をしていることがわかる。半無限積分の計算に台形則を適用するには無限積分に変換しなければならない。これにより標本点数が約 2 倍になってしまったためである。

この実験からも LB 公式は奇関数の半無限積分において台形則を上回る可能性があると思われる。

## 5.2 極座標変数変換・台形則と極座標変数変換・Lagrange-Bessel 積分公式の比較

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4+y^4} dx dy$$

をそれぞれの公式で数値積分する。極座標変数変換・台

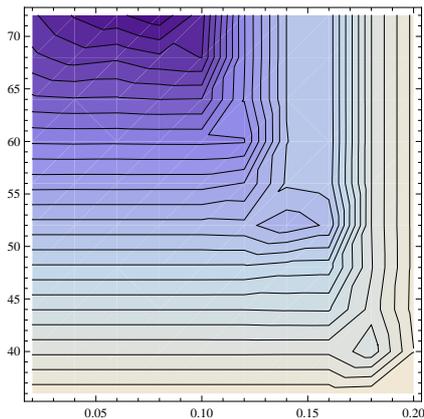


図 4 極座標変数変換・台形則の誤差変化グラフの等高線

形則の誤差変化がわかるように数値実験の結果をグラフにし、等高線を引いた。図 4 の等高線図は横軸が動径方向刻み幅、縦軸が角度方向分点数、高さが絶対誤差である。図中の色の濃い部分が絶対誤差の少ない数値結果を示している。等高線図を見てわかるように動径方向刻み幅、角度方向分点数の数値ごとに絶対誤差の限界値が定まっている。例えば角度方向分点数を 40 で固定した場合、動径方向刻み幅を 0.16 から 0.02 まで変化させながら数値実験を繰り返しても標本点数が増えるばかりで精度の向上はない。極座標変数変換・LB 公式の誤差変化の等高線図についてもこれと同様の性質が見受けられる。

十分な精度を得るために必要な標本点数を比較しなければならないので、極座標変数変換・台形則と極座標変数変換・LB 公式の数値実験の結果よりそれぞれ動径方

向の誤差と角度方向の誤差が釣り合っている部分を抜き出すプログラムを作成した。以下がその実行結果である。

## 極座標変数変換・台形則

$n$	刻み幅	標本点数	絶対誤差
36	0.20	1404	$5.12505 \times 10^{-7}$
48	0.15	2448	$1.95258 \times 10^{-9}$
60	0.13	3480	$7.00346 \times 10^{-11}$
72	0.10	5400	$9.85878 \times 10^{-14}$

## 極座標変数変換・LB 公式

$n$	パラメータ $h$	標本点数	絶対誤差
36	0.14	1008	$1.62959 \times 10^{-6}$
48	0.11	1680	$1.30417 \times 10^{-8}$
60	0.08	2880	$3.84466 \times 10^{-11}$
72	0.05	5472	$1.06581 \times 10^{-14}$

同程度の絶対誤差では極座標変数変換・LB 公式の方が標本点数が少ない。(台形則の最下段の絶対誤差は  $10^{-13}$  に近い)

## 6 おわりに

二重指数型積分公式は一次元では高い効果があるのに対し二次元ではその効果が失われてしまう。直積 DE 変換公式から非直積 DE 変換公式への改良で絶対誤差は飛躍的に減少したが極座標変数変換・台形則には勝らない。極座標変数変換・台形則を改良した極座標変数変換・LB 公式は極座標変数変換・台形則と同程度の性能であった。

積分公式の更なる充実も必要であるが、テスト関数の影響があるので優劣は一眼には言えない。その点を考慮するとテスト関数に適した計算を考えて実行するプログラムが必要である。各公式におけるパラメータの影響の解析を突き進めることにより、それは実現可能である。

積分公式の更なる発見、理論を含めた各パラメータの影響解析が今後の研究課題である。

## 参考文献

- [1] Masaaki Sugihara: Optimality of the double exponential formula-functional analysis approach, Numerische Mathematik, Vol.75, pp.379-395 (1997).
- [2] 杉浦洋: 数値計算の基礎と応用, サイエンス社 (1997).
- [3] 緒方秀教, 杉原正顯: Bessel 関数の零点を標本点を持つ補間および数値積分公式, 日本応用数学会論文誌 Vol.6, No.1, 1996, pp.39-66.
- [4] 杉原正顯, 室田一雄: 数値計算法の数理, 岩波書店 (1994).
- [5] 竹之内脩: 新・微分積分学, 培風館 (2002).