ダブルバリア型エクイティリンク債の評価

M2006MM027 佐藤 進平
指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

本研究では，対象株価の変動に応じて満期での償還額が変動する仕組債の1つであるシングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (稲熊，澤木 [3]) を拡張したダブルバリア型エクイティリンク債を評価する．すなわち，ダブルバリア型エクイティリンク債をオプション評価理論の枠組みで定式化し, 解析解を導出する．また，ダブルバリア型エクイティリンク債とシングルバリア型のノックイン条項型リンク債，割引債との関係も考察する．

2　ダブルバリア型エクイティリンク債 (bull type)

2.1　商品の説明

本節では，対象株価 (日経平均株価) が下落するときに額面割れの可能性があるダブルバリア型エクイティリンク債について議論する．この商品は観察期間中に対象株価 (日経平均株価) $S_t(t \in [0,T])$ の以下の 1〜4 のような変動に対応して，満期でのペイオフが変化する債券である．ただし，ノックアウト価格はノックイン価格よりも高いとする．

1. 株価が観察期間中に一度でもノックアウト価格 (上方バリア) 以上になる.
2. 株価が観察期間中に一度もノックアウト価格以上にならず，かつ，一度もノックイン価格 (下方バリア) 以下にならない.
3. 株価が観察期間中にノックイン価格以下になるが，満期での株価 S_T が初期の株価 S_0 よりも高い.
4. 株価が観察期間中にノックイン価格以下になり，さらに満期での株価が初期の株価よりも低い.

1〜3 の場合は，満期に額面価格 F で償還されるが，4 の場合は額面割れし，株価に連動した価格 ($= F \cdot \frac{S_T}{S_0}$) で償還される.

2.2　解析解の導出

本節では，ダブルバリア型エクイティリンク債 (bull type) の価格式を導出する．まず，株価 S_t がリスク中立測度 $\tilde{P}$ のもとで確率微分方程式

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma d\tilde{W}_t) \tag{1}$$

にしたがうものとする．ただし，r は無危険利子率，σ はボラティリティ，$\tilde{W}_t$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \tilde{P})$ 上で定義される標準ブラウン運動である.

次に，株価の最大値，最小値を

$$\hat{S_T} = \max_{0\le t\le T} S_t, \quad \check{S_T} = \min_{0\le t\le T} S_t \tag{2}$$

とし，ノックアウト価格 (上方バリア) を U, ノックイン価格 (下方バリア) を L とする．このとき，2.1 節で述べた性質をもつダブルバリア型エクイティリンク債の満期 T でのペイオフ $V^d(S_T,T)$ は,

$$\begin{aligned} V^d(S_T,T) &= F\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}\ge U\}} + F\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}<U,\check{S_T}\ge L\}} \\ &\quad + \min\left\{F, \frac{S_T}{S_0}F\right\}\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}<U,\check{S_T}<L\}} \end{aligned} \tag{3}$$

である．したがって，時刻 0 でのダブルバリア型エクイティリンク債の価格は，満期でのペイオフを割引いてリスク中立測度 $\tilde{P}$ のもとで期待値をとったものである.

補題 1　時刻 0 でのダブルバリア型エクイティリンク債の価格式 $V^d(S_0,0)$ は,

$$\begin{aligned} V^d(S_0,0) &= B(r,0) - \frac{F}{S_0}V_o^u(S_0,0;S_0) \\ &\quad + \frac{F}{S_0}V_k^d(S_0,0;S_0) \end{aligned} \tag{4}$$

となる．ただし,

$$B(r,0) = e^{-rT}F \tag{5}$$

$$V_o^u(S_0,0;K) = e^{-rT}\tilde{E}\left[(K-S_T)^+\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}<U\}}\right] \tag{6}$$

$$V_k^d(S_0,0;K) = e^{-rT}\tilde{E}\left[(K-S_T)^+\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}<U,\check{S_T}\ge L\}}\right] \tag{7}$$

である．ここで，$V_o^u(S_0,0;K)$ は，行使価格が K であるヨーロピアン・アップ・アンド・アウト・プットオプションの時刻 0 での価格であり，$V_k^d(S_0,0;K)$ は，行使価格が K であるヨーロピアン・ダブルノックアウト・プットオプションの時刻 0 での価格である．したがって，行使価格が K であるヨーロピアン・アップ・アンド・アウト・プットオプションの時刻 0 での価格式はブローディ [4] より,

$$\begin{aligned} &V_o^u(S_0,0;K) = \\ &\quad Ke^{-rT}\left\{\Phi(d_{1,K}^-) - \left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(d_{2,K}^-)\right\} \\ &\quad -S_0\left\{\Phi(d_{1,K}^+) - \left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi(d_{2,K}^+)\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} d_{1,x}^{\pm} &= \frac{\ln\frac{x}{S_0} - \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \\ d_{2,x}^{\pm} &= \frac{\ln\left(\frac{xS_0}{U^2}\right) - \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \end{aligned} \tag{9}$$

である．また，行使価格が S_0 であるヨーロピアン・ダブルノックアウト・プットオプションの時刻 0 での価格

式は，Anderson [1], Kunimoto and Ikeda [2] より，

$$
\begin{aligned}
V_k^d(S_0,0;S_0) = \\
& S_0 e^{-rT}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\{N(d_3^-)-N(d_4^-)\}\right.\\
& \left.-\left(\frac{L^{n+1}}{U^nS_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\{N(d_5^-)-N(d_6^-)\}\right]\\
& -S_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\{N(d_3^+)-N(d_4^+)\}\right.\\
& \left.-\left(\frac{L^{n+1}}{U^nS_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\{N(d_5^+)-N(d_6^+)\}\right] \qquad (10)
\end{aligned}
$$

となる．ただし，

$$d_3^{\pm} = \frac{\ln\left\{\frac{S_0}{L}\left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right\}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (11)$$

$$d_4^{\pm} = \frac{\ln\left(\frac{U}{L}\right)^{2n}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (12)$$

$$d_5^{\pm} = \frac{\ln\left\{\frac{L}{S_0}\left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right\}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (13)$$

$$d_6^{\pm} = \frac{\ln\left\{\left(\frac{L}{S_0}\right)^2\left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right\}+\left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \qquad (14)$$

であり，$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数である．以上より，ダブルバリア型エクイティリンク債 (bull type) の価格式を導出することができる．

定理 2 時刻 0 でのダブルバリア型エクイティリンク債の価格式 $V^d(S_0,0)$ は，以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
& V^d(S_0,0) = \\
& e^{-rT}F \\
& -F\left[e^{-rT}\left\{\Phi(d_{1,S_0}^-)-\left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(d_{2,S_0}^-)\right\}\right.\\
& \left.-\left\{\Phi(d_{1,S_0}^+)-\left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi(d_{2,S_0}^+)\right\}\right]\\
& +e^{-rT}F\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\{\Phi(d_3^-)-\Phi(d_4^-)\}\right.\\
& \left.-\left(\frac{L^{n+1}}{U^nS_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\{\Phi(d_5^-)-\Phi(d_6^-)\}\right]\\
& -F\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\{\Phi(d_3^+)-\Phi(d_4^+)\}\right.\\
& \left.-\left(\frac{L^{n+1}}{U^nS_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\{\Phi(d_5^+)-\Phi(d_6^+)\}\right].
\end{aligned}
$$

ここで，ノックアウト価格を十分高くすれば，ダブルバリア型エクイティリンク債はシングルバリア型のノックイン条項型リンク債 $V^s(S_0,0)$ に退化する．

$$\lim_{U\to\infty} V^d(S_0,0) = V^s(S_0,0).$$

一方，ノックイン価格を十分低くすれば，ダブルバリア型エクイティリンク債は割引債に退化する．

$$\lim_{L\to 0} V^d(S_0,0) = B(r,0). \qquad (15)$$

さらに，

$$V^s(S_0,0) \le V^d(S_0,0) \le B(r,0) \qquad (16)$$

という関係も得られる．

2.3 数値例

$F = 100000000$, $U = 20000$, $L = 15000$, $r = 0.01$, $\sigma = 0.25$, $T = 0.5$ とする．このとき，初期株価を変化させたときの割引債，シングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bull type)，ダブルバリア型エクイティリンク債 (bull type) の価格は図 1 のようになる．

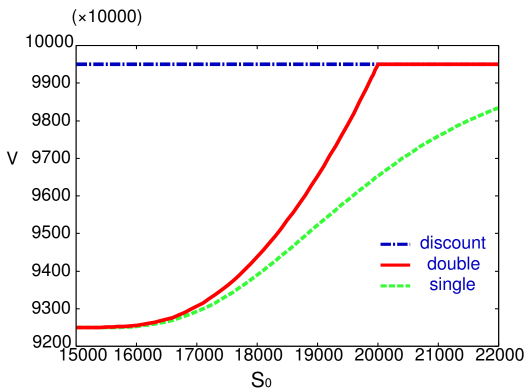

図 1 初期株価を変化させたときの各債券の価格

3 シングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bear type)

3.1 商品の説明

本節では，対象株価が上昇するときに額面割れする可能性があるシングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bear type) について議論する．この商品は観察期間中に対象株価の以下の 1〜3 のような変動に対応して満期でのペイオフが変化する債券である．

1. 一度もノックイン価格 (上方バリア) 以上にならない．
2. 対象株価が観察期間中にノックイン価格以上になるが，満期での株価が初期株価よりも低い．
3. 対象株価が観察期間中にノックイン価格以上になり，さらに満期での株価が初期株価よりも高い．

1〜2 の場合は，満期に額面価格 F で償還されるが，3 の場合は額面割れし，株価に連動した価格 ($F\cdot\max\{1-\frac{S_T-S_0}{S_0},0\}$) で償還される．ゆえに，この仕組債はノックイン価格が初期株価よりも上側に設けられている点で稲熊, 澤木 [3] と異なる．

3.2 解析解の導出

前節で述べたシングルバリア型のノックイン条項型リンク債の満期 T でのペイオフ $V_s(S_T,T)$ は,

$$V_s(S_T,T) = F\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}<U\}} + \min\left\{F, F\left(1-\frac{S_T-S_0}{S_0}\right)^+\right\}\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}\geq U\}} \quad (17)$$

である．したがって，時刻 0 でのシングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bear type) の価格式 $V_s(S_0,0)$ は, 以下のようになる.

補題 3　時刻 0 でのシングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bear type) の価格式 $V_s(S_0,0)$ は,

$$V_s(S_0,0) = B(r,0) + \frac{F}{S_0}V_i^u(S_0,0;2S_0) - \frac{F}{S_0}V_i^u(S_0,0;S_0) - B(r,0)\cdot\tilde{P}(\hat{S_T}>U) \quad (18)$$

となる．ただし,

$$V_i^u(S_0,0;K) = e^{-rT}\tilde{E}\left[(K-S_T)^+\mathbf{1}_{\{\hat{S_T}>U\}}\right] \quad (19)$$

である．$V_i^u(S_0,0;K)$ は，行使価格が K であるヨーロピアン・アップ・アンド・イン・プットオプションの時刻 0 での価格式である. また，$\tilde{P}(\hat{S_T}>U)$ は株価の最大値が U を上回る確率を表わす．ここで, ヨーロピアン・アップ・アンド・イン・プットオプションの価格はヨーロピアン・プットオプションの価格からヨーロピアン・アップ・アンド・アウト・プットオプションの価格 ((8) 式) を引けば導出が可能であり,

$$V_i^u(S_0,0;K) = Ke^{-rT}\left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(d_{2,K}^-) - S_0\left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\Phi(d_{2,K}^+) \quad (20)$$

となる．また, 株価の最大値が U を上回る確率 $\tilde{P}(\hat{S_T}>U)$ はブローディ [4] より,

$$\tilde{P}(\hat{S_T}>U) = 1-\tilde{P}(\hat{S_T}\leq U, S_T\leq U) = 1-\Phi(d_{1,K}^-) + \left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\Phi(d_{7,U}^-) \quad (21)$$

$$d_{7,x}^{\pm} = \frac{\ln\frac{S_0}{x} - \left(r\pm\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (22)$$

となる．したがって，以下が導出できる.

定理 4　時刻 0 でのシングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bear type) の価格式 $V_s(S_0,0)$ は，以下のようになる.

$$V_s(S_0,0) = e^{-rT}F\Phi(d_{1,U}^-) + e^{-rT}F\left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1}\{2\Phi(d_{2,2S_0}^-)-\Phi(d_{2,S_0}^-)-\Phi(d_{7,U}^-)\} - F\left(\frac{U}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1}\{\Phi(d_{2,2S_0}^+)-\Phi(d_{2,S_0}^+)\}. \quad (23)$$

4 ダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type)

4.1 商品の説明

本節では，3 節で議論した商品を拡張し，対象株価が上昇するときに額面割れの可能性があるダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type) について議論する．この商品は観察期間中に対象株価の以下の 1〜4 のような変動に対応して満期でのペイオフが変化する債券である．ただし，ノックアウト価格はノックイン価格よりも低いものとする.

1. 対象株価が観察期間中に一度でもノックアウト価格 (下方バリア) 以下になる.
2. 対象株価が観察期間中に一度もノックアウト価格以下にならず，かつ，一度もノックイン価格 (上方バリア) 以上にならない.
3. 対象株価が観察期間中にノックイン価格以上になるが，満期での株価 S_T が初期株価 S_0 よりも低い.
4. 対象株価が観察期間中にノックイン価格以上になり，さらに満期での株価が初期株価よりも高い.

1〜3 の場合は，満期に額面価格 F で償還されるが，4 の場合は額面割れし株価に連動した価格 $F\cdot\max\{(1-\frac{S_T-S_0}{S_0}),0\}$ で償還される．ダブルバリア型エクイティリンク債 (bull type) とは逆パターンとなる仕組債である.

4.2 解析解の導出

4.1 節で述べた性質をもつダブルバリア型エクイティリンク債の満期 T でのペイオフ $V_d(S_T,T)$ は,

$$V_d(S_T,T) = F\mathbf{1}_{\{\check{S_T}<L\}} + F\mathbf{1}_{\{\check{S_T}\geq L,\hat{S_T}<U\}} + \min\left\{F, F\left(1-\frac{S_T-S_0}{S_0}\right)^+\right\}\mathbf{1}_{\{\check{S_T}\geq L,\hat{S_T}\geq U\}} \quad (24)$$

となる．したがって，時刻 0 でのダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type) の価格式 $V_d(S_0,0)$ は, 以下のようになる.

補題 5　時刻 0 でのダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type) の価格式 $V_d(S_0,0)$ は,

$$\begin{aligned} V_d(S_0,0) &= \\ B(r,0) &+ \frac{F}{S_0}V_o^d(S_0,0;2S_0) - \frac{F}{S_0}V_k^d(S_0,0;2S_0) \\ &- \frac{F}{S_0}V_o^d(S_0,0;S_0) - B(r,0)\cdot\tilde{P}(\check{S_T}>L) \\ &+ \frac{F}{S_0}V_k^d(S_0,0;S_0) + B(r,0)\cdot\tilde{P}(\check{S_T}>L,\hat{S_T}<U) \end{aligned} \quad (25)$$

となる．ただし,

$$V_o^d(S_0,0;K) = e^{-rT}\tilde{E}\left[(K-S_T)^+\mathbf{1}_{\{\check{S_T}>L\}}\right] \quad (26)$$

である．ここで, $V_o^d(S_0,0;K)$ は，行使価格が K であるヨーロピアン・ダウン・アンド・アウト・プットオプション

の時刻 0 での価格である．また，$\tilde{P}(\check{S_T} > L)$ は対象株価の最小値が L を下回らない確率を，$\tilde{P}(\check{S_T} > L, \hat{S_T} < U)$ は対象株価が L を下回らず，かつ U を上回らない確率を表わす．対象株価の最小値が L を下回らない確率 $\tilde{P}(\check{S_T} > L)$ はブローディ [4] より，

$$\tilde{P}(\check{S_T} > L) = \Phi(-d_{1,L}^-) - \left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \Phi(-d_{7,L}^-) \quad (27)$$

となる．行使価格が K であるヨーロピアン・ダウン・アンド・アウト・プットオプションの時刻 0 での価格は，

$$V_o^d(S_0, 0) = e^{-rT} K[\Phi(-d_{1,L}^-) - \Phi(-d_{1,K}^-)$$
$$- \left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \{\Phi(-d_{7,L}^-) - \Phi(d_9^-)\}] - S_0[\Phi(-d_{1,L}^+)$$
$$-\Phi(-d_{1,K}^+) - \left(\frac{L}{S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}+1} \{\Phi(-d_{7,L}^+) - \Phi(d_9)\}]$$
$$d_9 = \frac{\ln\left(\frac{L^2}{KS_0}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (28)$$

である．株価の最小値が L を下回らず，かつ，最大値が U を上回らない確率は，Kunitomo and Ikeda [2] より，

$$\tilde{P}(\check{S_T} > L, \hat{S_T} < U) =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{U^n}{L^n}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \{\Phi(d_{10}) - \Phi(d_5^-)\} - \left(\frac{L^{n+1}}{U^n S_0}\right)^{\frac{2r}{\sigma^2}-1} \{\Phi(d_{11}) - \Phi(d_3^-)\} \right], \quad (29)$$
$$d_{10} = \frac{\ln\left\{\frac{U}{S_0}\left(\frac{L}{U}\right)^{2n}\right\} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_{11} = \frac{\ln\left\{\frac{S_0 U}{L^2}\left(\frac{U}{L}\right)^{2n}\right\} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

である．よって，(10) 式，(25) 式，(27) 式，(28) 式，(29) 式より，ダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type) の解析解を導出することができる．ただし，解析解は修士論文本体のみに掲載した．また，ノックアウト価格を十分小さくすれば，ダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type) は，シングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bear type) に退化する．

$$\lim_{L \to 0} V_d(S_0, 0) = V_s(S_0, 0).$$

一方，ノックイン価格を十分大きくすれば，ダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type) は，割引債に退化する．

$$\lim_{U \to \infty} V_d(S_0, 0) = B(r, 0).$$

さらに，2 節と同様に次のような関係が得られる．

$$V_s(S_0, 0) \leq V_d(S_0, 0) \leq B(r, 0).$$

4.3 数値例

2 節と同じ数値を用いると，割引債，シングルバリア型のノックイン条項型リンク債 (bear type)，ダブルバリア型エクイティリンク債 (bear type) の価格は図 2 のようになる．

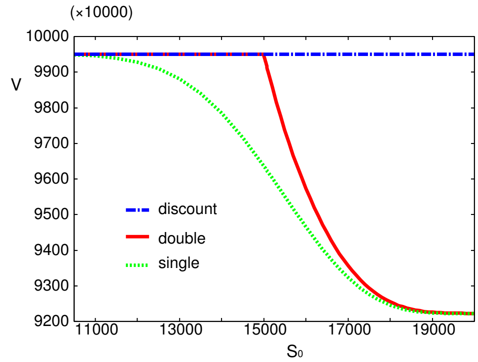

図 2 初期株価を変化させたときの各債券の価格

5 まとめ

株価が下落するときに額面割れする可能性があるダブルバリア型エクイティリンク債の価格式は，割引債とヨーロピアン・アップ・アンド・アウト・プットオプションとヨーロピアン・ダブルノックアウト・プットオプションの価格式で表現できることを示した．一方，株価が上昇するときに額面割れする可能性があるダブルバリア型エクイティリンクの価格式は，割引債，ヨーロピアン・ダウン・アンド・アウト・プットオプション，ヨーロピアン・ダブルノックアウト・プットオプションの価格式と株価の最小値がノックアウト価格を下回らない確率，株価の最小値がノックアウト価格を下回らず，かつ株価の最大値がノックイン価格を上回らない確率で表現できることを示した．また，ダブルバリア型エクイティリンク債の価格は，割引債の価格以下であり，シングルバリア型のノックイン条項型リンク債の価格以上であることも示した．

参考文献

[1] Anderson, T. W., A Modification of the Sequential Probability Ratio Test to Reduce the Sample Size, *The Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 165-197, 1960.

[2] Kunitomo, N. and Ikeda, M., Pricing Options with Curved Boundaries, *Mathematical Finance*, **2**, 275-295, 1992.

[3] 稲熊敏和，澤木勝茂，ノックイン条項型リンク債の評価，日本オペレーションズ・リサーチ学会 2006 年春季研究発表会アブストラクト集，26-27.

[4] ドージェ・ブローディ，現代ファイナンス数理，日本評論社，2000.