Unary interpretability logic の完全性について

M2004MM046 吉田 明
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

本論文は、de Rijke [2] で与えられた unary interpretability logic を対象とし、最小の unary interpretability logic il の健全性と完全性、および、unary interpretability logic と binary interpretability logic との関係の 2 つについて述べる。どちらも [2] で述べられているが、本論文では、それぞれについて以下を主張する。

[2] で与えられた完全性の証明には、論理式の定義との間に不整合と思われる部分がある。本論文は、adequate 集合等の定義を調整することで、この部分に関わらない形で完全性の証明を完結させている。さらに、[2] の健全性と完全性の証明で省略された部分を補い、その証明のいくつかの部分にはシークエントを用いた別証明を与えている。不整合と思われる部分は 2 つあり、それらを具体的に述べる。その第 1 は、[2] では、論理式が $\neg, \wedge, \Box, \mathbf{I}$ から構成されるのに対し、論理式 F の構成に関する帰納法では、その論理式が $F \equiv \Diamond B$ と $F \equiv \mathbf{I}B$ の場合のみを記述していることである。$F = \Box B$ の場合の証明を補おうとしたとき、$F \equiv \Diamond B$ の場合とは同様には証明できない部分がある。その第 2 は、先の論理式の構成に対して、$\perp$ が任意の論理式の部分論理式として扱われていると解釈せざると得ない部分である。これに対して、本論文では、$\perp$ は任意の論理式の部分論理式と定義している。2 種類の logic の関係については、[2] で証明された命題に、シークエントを用いた方法での別証明を与えている。

2　Unary interpretability logic

Unary interpretability logic の言語 $\mathfrak{L}(\Box, \mathbf{I})$ は $\perp$ と加算個の命題変数 $p_0, p_1, \cdots$ と結合子 $\neg, \wedge, \Box, \mathbf{I}$ から成る。論理式は $\mathfrak{L}(\Box, \mathbf{I})$ から、ふつうの方法で定義する。この論理式全体の集合を $WFF_{\mathbf{I}}$ とする。この節では、unary interpretability logic il および il に対応する il-フレーム、il-モデルを導入する。部分論理式は、次のように定義する。

定義 1(**部分論理式**)
論理式 A の部分論理式を次のように定義する：
(1)$\perp$ は A の部分論理式である。
(2)A 自身は A の部分論理式である。
(3)A が $(B \wedge C)$ の形をしているとき、B の部分論理式および C の部分論理式はすべて A の部分論理式でもある。
(4)A が $(\neg B), (\Box B)$ の形をしているとき、B の部分論理式はすべて A の部分論理式でもある。
(5)A が $(\mathbf{I}B)$ の形をしているとき、B の部分論理式はすべて A の部分論理式でもある。

また、$\top$を$\neg\perp$、$A \vee B$ を$\neg(\neg A \wedge \neg B)$、$A \supset B$ を$\neg A \vee B$、$\Diamond A$ を$\neg\Box\neg A$ の省略形として用いる。

定義 2(il)
Unary interpretability logic il は、証明可能性の論理 L に以下の公理を加えることによって得られる：
($\mathbf{I}$1)$\mathbf{I}\Box\perp$
($\mathbf{I}$2)$\Box(A \supset B) \supset (\mathbf{I}A \supset \mathbf{I}B)$
($\mathbf{I}$3)$\mathbf{I}(A \vee \Diamond A) \supset \mathbf{I}A$
($\mathbf{I}$4)$(\mathbf{I}A \wedge \Diamond\top) \supset \Diamond A$
以下の公理の 1 つをつかって il を拡張する：
$(m)\mathbf{I}A \supset \mathbf{I}(A \wedge \Box\perp)$
$(p)\mathbf{I}A \supset \Box\mathbf{I}A$
(m) を使って拡張した論理を ilm,(p) を使って拡張した論理を ilp という。

論理式 A が il で証明可能であることを $il \vdash A$ と表す。同様にして、$ilm \vdash A, ilp \vdash A$ という表現もする。他の論理についても、同様に$\vdash$ を用いる。

il-フレーム $\langle W, R, S\rangle$、il-モデル $\langle W, R, S \Vdash\rangle$ を以下のように定義する。

定義 3(**il-フレーム、il-モデル**)
次の 3 条件を満たす 3 重対 $\langle W, R, S\rangle$ を il-フレーム (Veltman-フレーム) という：
1. W は空でない集合である。
2. R は推移的な W 上の 2 項関係で、R の無限チェーン ($\alpha_1 R \alpha_2 R \alpha_3 R \cdots$ を満たす、W の要素の無限列 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$) はない。
3. $S = \{S_w : w \in W\}$ は、W 上の以下の 3 条件を満たす 2 項関係の集まりである：
   (a) S_wは $wR(= \{v : wRv\})$ 上の関係である。
   (b) S_w は推移的で反射的である。
   (c) $w', w'' \in wR$ で $w'Rw''$ のとき $w'S_w w''$ である。

次の 2 条件を満たす 4 重対 $\langle W, R, S, \Vdash\rangle$ を il-モデルという：
1. $\langle W, R, S\rangle$ は il-フレームである。
2. $\Vdash$ は $\perp, \wedge, \neg$ についてのふつうの条件と $\Box, \mathbf{I}$ についての条件

$$u \Vdash \Box A \iff \forall v(uRv \text{ ならば } v \Vdash A)$$
$$x \Vdash \mathbf{I}A \iff \forall y(xRy \text{ ならば } \exists z(yS_x z \text{ かつ } z \Vdash A))$$

を満たす、W から $WFF_{\mathbf{I}}$ への関係である。また、W の任意の要素 w に対して $w \Vdash A$ となるとき、論理式 A は $M = \langle W, R, S, \Vdash \rangle$ で恒真であるといい、$M \models A$ と表す。

3　健全性

この節では、第 2 節で定義した il および il-モデルについての以下の定理を示す。この定理は、第 5 節で扱う完全性の逆であり、健全性という。

定理 1(**健全性**)
$il \vdash A \Longrightarrow$ すべての有限 il-モデルで $M \models A$

小野 [1] で述べられている L の性質から、L における各推論規則は論理式の恒真性を保存し、L の公理は恒真であることがわかる。よって次の補助定理を示せば定理の証明を得る。

補助定理 1
公理 $(\mathbf{I}1), (\mathbf{I}2), (\mathbf{I}3), (\mathbf{I}4)$ は il-モデルで恒真である。

(証明)
$(\mathbf{I}3)\mathbf{I}(A \vee \Diamond A) \supset \mathbf{I}A$ が恒真であることを示す (図 1 参照)。
恒真でないと仮定する。するとある il-モデル $\langle W, R, S, \Vdash \rangle$ のある $x \in W$ で $x \nVdash \mathbf{I}(A \vee \Diamond A) \supset \mathbf{I}A$ である。すなわち $x \Vdash \mathbf{I}(A \vee \Diamond A), x \nVdash \mathbf{I}A$ である。$x \nVdash \mathbf{I}A$ より、xRy となる y が存在し、yS_xz を満たすすべての z で $z \nVdash A$ となる。また $x \Vdash \mathbf{I}(A \vee \Diamond A)$ より xRy を満たすすべての y で、yS_xz かつ $z \Vdash A \vee \Diamond A$ を満たす z が存在するので、$x \nVdash \mathbf{I}A$ より得られた y でも yS_xz かつ $z \Vdash A \vee \Diamond A$ を満たす z が存在する。yS_xz を満たすすべての z で $z \nVdash A$ より、その z でも $z \nVdash A$ がいえる。$z \Vdash A \vee \Diamond A$ より $z \Vdash A$ または $z \Vdash \Diamond A$ が成立するが、$z \nVdash A$ なので、$z \Vdash \Diamond A$ を得る。$z \Vdash \Diamond A$ は $z \nVdash \Box\neg A$ と同値なので、zRz' を満たすある z' で $z' \Vdash A$ である。そして、xRz, xRz', zRz' より定義 3 の 3(c) を用いて、zS_xz' を得る。yS_xz と S_x の推移性 (定義 3 の 3(b)) を用いて yS_xz' を得る。yS_xz を満たすすべての z で $z \nVdash A$ となることから、z' でも $z' \nVdash A$ になり、$z' \Vdash A$ と矛盾する。
よって、$\mathbf{I}(A \vee \Diamond A) \supset \mathbf{I}A)$ は恒真である。

4　完全性を証明する準備

様相論理の完全性の証明に対して、極大無矛盾集合を使う方法がある。この節では、第 5 節の完全性を証明するために、極大無矛盾集合に関係するいくつかの補助定理を示す。

定義 4(successor)
Γ と Δ は 2 つの il-極大無矛盾集合であるとする。

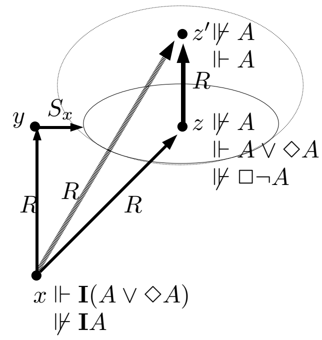

図 1　$x \nVdash (\mathbf{I}3)$

1. Δ が Γ の successor であるとは以下の条件を満たすことである ($\Gamma < \Delta$ は、Δ が Γ の successor であることを表す)：
   (a) すべての A で、$\Box A \in \Gamma$ ならば $A \in \Delta$ である。
   (b)$\Box A \notin \Gamma$ かつ $\Box A \in \Delta$ を満たす A が存在する。
2. Δ が Γ の C-critical successor であるとは以下の条件を満たすことである ($\Gamma <_C \Delta$ は Δ が Γ の C-critical successor であることを表す)：
   (a)$\Gamma < \Delta$
   (b)$\mathbf{I}C \notin \Gamma$
   (c)$\neg C, \Box\neg C \in \Delta$

[2] は、次の補助定理が成立することを述べている。[2] では、証明が省略されているが本論文では証明を補った。

補助定理 3
Γ と Δ は 2 つの il-極大無矛盾集合であるとする。このとき、次の 3 つが成立する：
1. $\Gamma <_C \Delta < \Delta'$ のとき、$\Gamma <_C \Delta'$ である。
2. $\Gamma < \Delta$ のとき、$\Gamma <_\perp \Delta$ である。
3. $\Gamma < \Delta < \Delta'$ のとき、$\Gamma < \Delta'$ である。

定義 5(adequate)
論理式の集合 Φ は、以下の条件を満たすとき adequate であるという：
1. $B \in \Phi$ のとき、C が B の部分論理式ならば、$C \in \Phi$ である。
2. $B \in \Phi$ のとき、B が $\neg C$ の形でないならば、$\neg B \in \Phi$ である。
3. $\Box B \in \Phi$ のとき、B が $\neg C$ の形でないならば、$\Box\neg\neg B \in \Phi$ である。

Φ を adequate 集合とする。$\Diamond B \in \Phi$,$\mathbf{I}B \in \Phi$,$B \equiv \top$ のいずれかが成立するとき、論理式 $\Diamond B$ は almost in Φ という。
[2] では、上記の 1,2 を満たす集合を adequate とよん

でいる。しかし、[2] の完全性の証明で省略されているところを補おうとすると不都合がでるため、ここでは条件 3 を追加している。

この条件を加えることによって、「$\Box B \in \Phi$ のとき $\Diamond\neg B$ が almost in Φ」が成り立ち、第 5 節定理 2 の証明 (2) で役立つ。そして、Φ を有限集合にしたいので、Φ が無限に続かないように「B が $\neg C$ の形でないならば」という条件をいれている。実際、与えられた論理式 A に対し、$\neg A \in \Phi$ を満たす有限の adequate 集合が存在する。この事実が第 5 節で用いられている。

[2] は、次の補助定理を証明した。[2] では、証明が省略されているが、本論文ではシークエントを用いて、この証明を補った。

補助定理 4

Γ が $\Diamond C \in \Gamma$ を満たす il-極大無矛盾集合のとき $C, \Box\neg C \in \Delta$ を満たし $\Gamma < \Delta$ となるような il-極大無矛盾集合 Δ が存在する。

5　Unary interpretability logic の完全性

この節では、il の完全性、すなわち、次の定理を証明する。

定理 2(**完全性**)

すべての il-モデルで $M \models A \Longrightarrow il \vdash A$

この定理を証明するために、極大無矛盾集合 Γ と有限 adequate 集合 Φ から、構造 $\langle W_\Gamma, R, S\rangle$ を定義する。この $\langle W_\Gamma, R, S\rangle$ は il-フレームになる。ここで W_Γ は、il-極大無矛盾集合 Δ と論理式の対の列との対 $\langle\Delta,\tau\rangle$ の集合である。対 $\langle\Delta,\tau\rangle$ を表すのに記号 $\bar{w}, \bar{v}, \cdots$ を使う。$\bar{w} = \langle\Delta,\tau\rangle$ のとき、$(\bar{w})_0 = \Delta, (\bar{w})_1 = \tau$ とおく。$\sigma \subseteq \tau$ は、σ は τ の最初の部分であることを表し、$\sigma \subset \tau$ は、σ は τ の真の最初の部分であることを表している。σ ^ τ は、σ と τ の連鎖を表す。

定義 6(**極小集合** W_Γ)

Γ を極大無矛盾集合、Φ を有限 adequate 集合とするとき、対 $\langle\Delta,\tau\rangle$ の極小集合 W_Γ を以下のように定義する。

1. $\langle\Gamma, \langle\langle\ \ \rangle\rangle\rangle \in W_\Gamma$
2. $\langle\Delta,\tau\rangle \in W_\Gamma, \Diamond B \in \Delta$ が almost in $\Phi, C \in \Phi$ の 3 条件が成立し、ある Δ' が存在して、Δ が il-極大無矛盾集合であること、および , $\Delta <_C \Delta', B, \Box\neg B \in \Delta'$ を満たすとき、その 1 つの Δ' に対して、$\langle\Delta', \tau$ ^ $\langle\langle B, C\rangle\rangle\rangle \in W_\Gamma$ である。

そして、W_Γ 上の関係 R を

$$\bar{w}R\bar{v} \Leftrightarrow (\bar{w})_1 \subset (\bar{v})_1$$

と定義する。また、W_Γ 上の関係の集まり S を

$\bar{v}S_{\bar{w}}\bar{u} \Leftrightarrow$ ある B, B', C, τ, σ が存在して、

$$(\bar{v})_1 = (\bar{w})_1 \,\hat{}\, \langle\langle B, C\rangle\rangle \,\hat{}\, \tau \text{ かつ}$$

$$(\bar{u})_1 = (\bar{w})_1 \,\hat{}\, \langle\langle B', C\rangle\rangle \,\hat{}\, \sigma$$

と定義する。

[2] は次の補助定理を証明した。[2] では、証明が省略されているが、本論文ではこの証明を補った。

補助定理 5

極大無矛盾集合 Γ と有限 adequate 集合 Φ から定義される極小集合 W_Γ に対して、以下の 6 つのことがいえる：

1. W_Γ は有限集合である。
2. $(\bar{w})_1 = (\bar{v})_1$ のとき、$\bar{w} = \bar{v}$ である。
3. $\bar{w}R\bar{v}$ のとき、$(\bar{w})_0 < (\bar{v})_0$ である。
4. $\langle W_\Gamma, R, S\rangle$ は、il-フレームである。
5. $\langle\Delta,\tau\rangle \in W_\Gamma$ で、E が τ に現れる対の第 2 成分であるとき、$\neg E, \Box\neg E \in \Delta$ である。

以下で述べる定理 2 の証明は、[2] で与えられた証明を補いながら行う。

(定理 2 の証明)

$il \nvdash A$ を仮定して、ある il-モデルで A が偽であることを証明する。つまり対偶「$il \nvdash A \Longrightarrow$ ある有限 il-モデルで $M \not\models A$」を証明する。Φ を $\neg A$ を要素とする有限 adequate 集合とし、Γ を $\neg A$ を要素とする il-極大無矛盾集合として、定義 6 のように、$\langle W_\Gamma, R, S\rangle$ を定義し、さらに $\bar{w} \Vdash p \Leftrightarrow p \in (\bar{w})_0$ のように $\Vdash$ を定義する。そして $M = \langle W_\Gamma, R, S, \Vdash\rangle$ が、$M \not\models A$ を満たす il-モデルであることを示す。補助定理 5 の 5 より $\langle W_\Gamma, R, S\rangle$ は il-モデルである。$M \not\models A$ を示すために、

$$\left.\begin{array}{r}\text{すべての } F \in \Phi \text{とすべての} \bar{w} \in W_\Gamma \text{で、}\\ \bar{w} \Vdash F \Leftrightarrow F \in (\bar{w})_0\end{array}\right\}\circledast$$

を F の帰納法によって証明する。

[2] では $F \equiv \Diamond B$ と $F \equiv \mathbf{I}B$ の 2 つの場合の証明が与えられている。しかし、この証明は、$\mathfrak{L}(\Box, \mathbf{I})$ の論理式の定義と整合していないと考える。本論文では、論理式の定義と整合するよう [2] の 2 つの場合に加えて、$F = \Box B, F = B \wedge C, F = \neg B, F = \bot$ の場合を追加した。$F = \Box B$ のときに、定義 5 で述べられたことが用いられる。以下では、追加した 5 つの場合を示す。

(1)$F = \Box B$ のときの $(\Longleftarrow)$ を示す。$F \in (\bar{w})_0$ を仮定して、$\forall\bar{v}(\bar{w}R\bar{v}$ ならば $B \in (\bar{v})_0)$ を示せばよい。

ここで、$\bar{w}R\bar{v}$ を満たす任意の $\bar{v}$ が与えられたとする。$\bar{w}R\bar{v}$ と補助定理 5 の 3 より $(\bar{w})_0 < (\bar{v})_0$ なので、定義 4 の 1(a) より、$B \in (\bar{v})_0$ である。

よって、$\forall\bar{v}(\bar{w}R\bar{v}$ ならば $B \in (\bar{v})_0)$ が示された。

(2)$F = \Box B$ のときの $(\Longrightarrow)$ を示す。$F \notin (\bar{w})_0$ を仮定して、$\exists\bar{v}(\bar{w}R\bar{v}$ かつ $\neg B \in (\bar{v})_0)$ を示せばよい。

$\Box B \in \Phi$ より、追加した定義 5 の条件 3 より $\Box\neg\neg B \in \Phi$ であり、さらに定義 5 の条件 2 より $\neg\Box\neg\neg B \in \Phi$ である。$\Diamond A = \neg\Box\neg A$ より $\Diamond\neg B \in \Phi$ であり、定義 5 と

$F \notin (\bar{w})_0$ より、$\Diamond\neg B \in (\bar{w})_0$ であり、$\Diamond\neg B$ は almost in Φ である。また、$\bot \in \Phi$ なので、補助定理 2 より $(\bar{w})_0 < \Delta$ と $\neg B, \Box\neg\neg B \in \Delta$ を満たす il-極大無矛盾集合 Δ が存在し、補助定理 3 より、$(\bar{w})_0 <_{\bot} \Delta$ となる。そして、定義 6 より $\langle \Delta, (\bar{w})_1 {}^\frown \langle\langle \neg B, \bot \rangle\rangle \rangle \in W_\Gamma$ である。この W_Γ の要素を $\bar{v}$ とおく。$\neg B \in \Delta = (\bar{v})_0$ であり、$(\bar{w})_0 \subset (\bar{v})_0$ より $\bar{w}R\bar{v}$ である。よって $\bar{w}R\bar{v}$ かつ $\neg B \in (\bar{v})_0$ が示された。

(3)$F = B \wedge C$ のとき、2 条件

$$B \wedge C \in (\bar{w})_0 \Longleftrightarrow B \in (\bar{w})_0 \text{かつ } C \in (\bar{w})_0$$
$$(\bar{w})_0 \Vdash B \wedge C \Longleftrightarrow (\bar{w})_0 \Vdash B \text{ かつ } (\bar{w})_0 \Vdash C$$

と帰納法の仮定より $\circledast$ を得る。

(4)$F = \neg B$ のとき、2 条件

$$\neg B \in (\bar{w})_0 \Longleftrightarrow B \notin (\bar{w})_0$$
$$(\bar{w})_0 \Vdash \neg B \Longleftrightarrow (\bar{w})_0 \nVdash B$$

と帰納法の仮定より $\circledast$ を得る。

(5)$F = \bot$ のとき、$(\bar{w})_0 \nVdash \bot$ と $\bot \notin (\bar{w})_0$ より、$\circledast$ を得る。

6 Unary interpretability logic と binary interpretability logic

[2] によって導入された unary interpretability logic における様相記号 $\mathbf{I}$ の解釈は、 binary interpretability logic における 2 項様相記号 $\rhd$(“$A \rhd B$” は A interprets B と読む) の解釈に基づいている。この節では、この binary interpretability logic を導入し、[2] に従って、unary interpretability logic との関係を述べる。Binary interpretaility logic の言語は、$\mathfrak{L}(\Box)$ に 2 項結合子記号 $\rhd$ を加えた言語であり、これを $\mathfrak{L}(\Box, \rhd)$ と表す。論理式は $\mathfrak{L}(\Box, \rhd)$ からふつうの方法で定義する。

定義 7(Binary interpretability logic IL)

Binary interpretability logic IL は L に以下の公理を加えることによって得られる：

$(J1)\Box(A \supset B) \supset A \rhd B$
$(J2)((A \rhd B) \wedge (B \rhd C)) \supset (A \rhd C)$
$(J3)((A \rhd C) \wedge (B \rhd C)) \supset (A \vee B) \rhd C$
$(J4)(A \rhd B) \supset (\Diamond A \supset \Diamond B)$
$(J5)(\Diamond A) \rhd A$

以下の公理の 1 つをつかって IL を拡張する。

$(M)A \rhd B \supset (A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)$
$(P)A \rhd B \supset \Box(A \rhd B)$

(M) を使って拡張した論理を ILM,(P) を使って拡張した論理を ILP という。

本論文では、IL, ILM, ILP に対応するシークエント体系も考える。混乱のないかぎり、シークエント体系ともとの体系を同一視する。IL のシークエント体系は、Avron [3],Valentini [4] によって導入された GL に $(J1), (J2), (J3), (J4), (J5)$ に対応した次のシークエントを公理として加えた体系として定義する。

$\Box(A \supset B) \to A \rhd B$
$((A \rhd B) \wedge (B \rhd C)) \to (A \rhd C)$
$((A \rhd C) \wedge (B \rhd C)) \to (A \vee B) \rhd C$
$(A \rhd B) \to (\Diamond A \supset \Diamond B)$
$\to (\Diamond A) \rhd A$

これらは、それぞれ $(J1), (J2), (J3), (J4), (J5)$ と同一視する。ILM, ILP のシークエント体系も、同様にして、上の体系に $(M), (P)$ に対応した次のシークエントを、公理として加えた体系としてそれぞれ定義する。

$A \rhd B \to (A \wedge \Box C) \rhd (B \wedge \Box C)$
$A \rhd B \to \Box(A \rhd B)$

これらも $(M), (P)$ と同一視する。

以下では、$\mathfrak{L}(\Box, \rhd)$ においても $\mathbf{I}$ を加えて考え、IL では、

$$\mathbf{I}A \text{ と } \top \rhd A \text{ は同値}$$

とする。その上で binery interpretability logic と unary interpretability logic の関係を述べる。具体的には、[2] で述べられている次の定理を証明する。本論文では、シークエントを用いて、[2] とは異なる方法で証明した。

定理 3

$\mathfrak{L}(\Box, \mathbf{I})$ の論理式 A に対して、次が成り立つ：

(a)$il \vdash A$ のとき $IL \vdash A$ である。
(b)$ilm \vdash A$ のとき $ILM \vdash A$ である。
(c)$ilp \vdash A$ のとき $ILP \vdash A$ である。

(証明)

(a) に必要な $(IL \vdash (\mathbf{I}4))$ のみ示す。上で述べた約束によって、$(\mathbf{I}4)$ は $((\top \rhd A) \wedge \Diamond\top) \supset \Diamond A$ と同値である。以下に $(\top \rhd A) \wedge \Diamond\top \to \Diamond A$ の IL での証明図を示す。

$$\dfrac{\dfrac{(J4) \qquad \dfrac{\Diamond\top \to \Diamond\top \quad \Diamond A \to \Diamond A}{\Diamond\top \supset \Diamond A, \Diamond\top \to \Diamond A}\,(\supset \text{左})}{\top \rhd A, \Diamond\top \to \Diamond A}\,(cut)}{(\top \rhd A) \wedge \Diamond\top \to \Diamond A}\,(\wedge\text{左})$$

参考文献

[1] 小野寛晰: 情報科学における論理, 日本評論社 (1994).

[2] Maarten de Rijke: Unary interpretability logic, Notre Dame Journal of Formal Logic 33, pp. 249–255 (1992)

[3] Arnon Avron: On modal systems having arithmetical interpretation, The Journal of Symbolic Logic 49. pp.935–942 (1984)

[4] Silvio Valentini: The modal logic of provability, cut-elimination,Journal of Philosophical logic, 12, pp. 471–476 (1983)