

拘束システムに対するロバスト性を有するリファレンスガバナの設計

M2005MM019 小田由弘

指導教員: 高見勲

1 はじめに

実際の制御系では、制御対象の飽和要素や入力限界等、数多くの拘束条件が存在する。これらの拘束条件を考慮にいない場合には、ウィンドアップ現象による制御系の不安定化や、ハードウェアの破壊を招く恐れがある。よって、制御系設計においては、良好な過渡応答を得ることだけでなく制約条件を満足することが必要とされる。

制御入力にのみ拘束が存在するシステムに対して、追従性能の改善のみを目的としたアンチウィンドアップ補償といった制御手法が存在するが、この手法は拘束条件が破れて初めて機能するので拘束条件を達成されることを要求される場面では実用的ではない。このような拘束システムに対し、拘束条件を満足し、性能を向上させる1つの制御手法としてリファレンスガバナが存在する[3][4][5][6]。リファレンスガバナは拘束条件を満足するよう目標値を整形し、それを閉ループ系に対して印加する機構である。

リファレンスガバナの設計問題はLMI(線形行列不等式)として定式化することができる。しかし、サンプリングタイムが小さければ小さいほどLMIで解くべき変数が増加し、リファレンスガバナは実装において膨大な計算量を必要とする。また、行列拡大による影響でメモリ不足に陥ってしまう問題もある。さらに、短いサンプリングタイムにおいてもリファレンスガバナが設計できない問題は致命的である。この問題に対しては、スラック変数を導入し、制約条件を記述する不等式の数減らす設計法[2]や、目標値修正の間隔をサンプリング間隔の整数倍にし(間引き)、各サンプリングタイムにおける拘束条件を常に満たし、目的関数を最小化するLMI最適化問題を解く設計法が提案されている[11]。また、ロバスト性を考慮したリファレンスガバナも近年注目を集めている。状態アフィン関数を導入する[1]などいくつかの対処法が存在しているが、本論文では間引きを行なった場合においても、モデル化誤差やノイズに対してロバスト(頑健)なリファレンスガバナを設計することを目的とする。私が知る限り、間引きにおけるロバスト性保証はまだされていない。

例えばモデル化誤差には、非線形システムを線形化したことに伴う線形化誤差、システム自身の特性変化によるモデルパラメータの変動、高次元モデルの低次元化による高次のモードを無視したことによる非モデル化要素、化学変化など複雑な現象のモデル化誤差がある。この場合、モデルは現実の制御対象とは必ずしも一致しないと言える[7]。よって、ロバスト性を陽に考慮して制御設計を行なうことは必要不可欠である。

この際、動的な不確かさを考慮したロバストなリファレンスガバナをLMI(線形行列不等式)問題に帰着させ定式化する。さらに、三慣性システムを用いて、シミュレー

ション及び実装を行い理論の妥当性、有効性を検証する。

2 リファレンスガバナ設計

制御対象 Σ_p とフィードバック補償器 Σ_c からなる閉ループシステム Σ_{cl} を図1に示す。またこの際、 Σ_c はあらかじめ与えられているが、必ずしも拘束を考慮して設計されたとは限らないものとする。このとき閉ループシステム Σ_{cl} は離散システムとして扱い、その状態空間方程式は以下のように記述するとする。

$$\begin{aligned} x(t+1) &= A_{cl}x(t) + B_{cl}g(t) \\ \Sigma_{cl}: \quad y(t) &= C_yx(t) + D_yg(t) \\ z(t) &= C_zx(t) + D_zg(t) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで $x(t) \in R^n$ は閉ループ系の状態、 $y(t) \in R^m$ は出力、 $g(t) \in R^m$ は設計するべき修正目標値、 $z(t) \in R^l$ は拘束条件を表すベクトルとする。また、以下の条件を満たしているとする。

- 条件1 $x(0) = 0$:初期状態
- 条件2 A_{cl} が安定
- 条件3 $r(t)=r_0$ の場合、 $y(t)$ は r_0 に定常偏差なしに追従する
- 条件4 拘束条件のベクトル $z(t)$ は $|z_j(t)| \leq 1, \forall t, j = 1, 2, 3, \dots, l$ (2)

また、 z_j は z の j 番目の要素を表す。

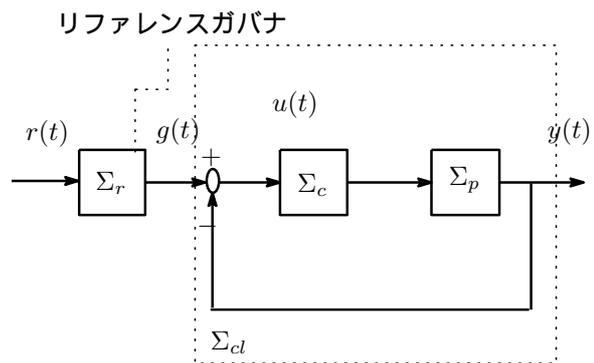


図 1: リファレンスガバナ1

リファレンスガバナは上記の条件を満足し、出力 $y(t)$ が与えられステップ目標値定数 $r(t) = r_0$ にできるだけ早く追従するような修正目標値列 $g(0) g(1) g(2) \dots$ を生成することである。本論文では、リファレンスガバナを導入際にあたって最小とすべき目的関数 J を(3)式のように定義する。

$$J = \sum_{t=0}^N \|r_0 - y(t)\|^2 + \sum_{t=0}^N w(t) \|r_0 - g(t)\|^2 \quad (3) \quad S(t)$$

ここで $w(t)$ は $w(t) > 0$ である重み関数、 N は総サンプリング数である。また、上式の第一項は出力 $y(t)$ を参照入力 r_0 に速やかに追従させることを、第二項は、修正目標値列の振る舞いを安定化させることを目的としている。この評価関数 J を最小化する修正目標値列 $g(t)$ の設計をLMIに帰着させて解くことによって、リファレンスガバナを設計することができる[3]。

3 リファレンスガバナのロバスト性保証

3.1 不確かさを持つ場合のLMI最適化問題

従来のリファレンスガバナ、あるいは、間引きによって設計されるリファレンスガバナは、モデル化誤差の影響を考えておらず、オフライン設計の場合、顕著にその影響が出てしまう。これは、シミュレーションにおいては良好な結果が得られたとしても、実システムに対しては拘束条件を破ってしまうことを意味している。つまり、ロバスト性を考慮した設計が必要不可欠と言える。そこで、モデル化誤差を加法的な変動 Δ と見積もって考えた場合、下図のように考えられる。

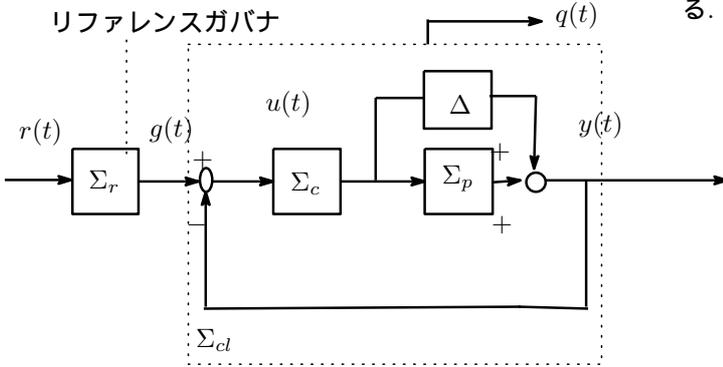


図 2: リファレンスガバナ2

$$q(t) = C_q x(t) + D_q g(t) \quad (4)$$

を(1)式に追加し、 $q(t) \in R^p$ を新たに評価する出力とする。ロバスト保証のためのモデル化誤差条件の拘束条件を

$$\underline{q}_{mj}(t) \leq q_j(t) \leq \bar{q}_{mj}(t) (j = 1, \dots, p) \quad (5)$$

とする。また、 $\underline{q}_{mj}, \bar{q}_{mj}$ は $q_j(t)$ の上限値、下限値である。

ここで、以下の仮定を与える。

ステップ応答列 $\{S_{qj}(t)\}_{i=0, 1, \dots}$ は

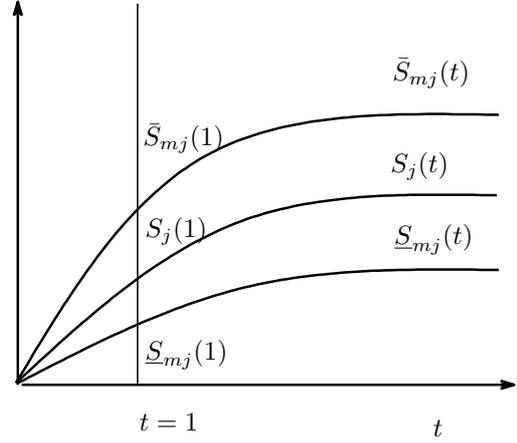


図 3: $S(t)$ の応答

$$\underline{S}_{qj}(t) \leq S_{qj}(t) \leq \bar{S}_{qj}(t) (j = 1, \dots, p) \quad (6)$$

という不確かさをもつ $\underline{S}_{qj}(t), \bar{S}_{qj}(t)$ は $S_{qj}(t)$ の下限値、上限値である。(3)式を最小化し、(2)式、(5)式の条件を満たすLMI最適化問題を解くことによって、ロバスト性を有するリファレンスガバナの導出が可能となる。[3]

3.2 間引きありの場合のロバスト性保証

3.2.1 ノミナルモデルにおける評価関数Jに関するLMI

不確かさ Δ を用いると(3)式は以下のように定式化できる。

$$F_1(\gamma, \Delta \tilde{G}) = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_1 & \Delta \tilde{G} \\ \Delta \tilde{G}^T & \gamma - \tilde{\Theta}_2 + 2\tilde{\Theta}_3 \Delta \tilde{G} \end{bmatrix} > 0 \quad (7)$$

$$\tilde{\Theta}_1 = (T^T M_y^T M_y T + T^T W T)^{-1}$$

$$\tilde{\Theta}_2 = R_0^T (I + W) R_0$$

$$\tilde{\Theta}_3 = R_0^T M_y T + R_0^T W T$$

$$W = \text{diag}(w(0), w(1), w(2), \dots, w(N))$$

$$R_0 = [r_0^T(0) \ r_0^T(1) \ r_0^T(2) \ \dots \ r_0^T(N)]^T$$

$$\Delta \tilde{G} = [\Delta \tilde{g}^T(0) \ \Delta \tilde{g}^T(1) \ \Delta \tilde{g}^T(2) \ \dots \ \Delta \tilde{g}^T(N/n)]^T$$

$$(\Delta \tilde{G} = \sum_{i=0}^t \Delta \tilde{g}(i))$$

$$T = \begin{pmatrix} H & 0 & \dots & 0 \\ 0 & H & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & H \end{pmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} I_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix}$$

なお、 I_m は単位行列、 M_y は $(N+1)m * (N+1)m$ 行列である[11]。

3.2.2 モデル化誤差の拘束条件g(t)に関するLMI

$q(t)$ をサンプリングタイムの間引きをn倍にした際には $\tilde{q}(t)$ とする。 $\tilde{q}(t)$ は

$$\tilde{q}(t) = \sum_{j=0}^{t-1} C_q \left(\sum_{k=1}^n A_{cl}^{n(t-j)-k} B_{cl} \right) \tilde{g}(j) + D_q \tilde{g}(t) \quad (8)$$

となるので、

$$\tilde{M}_q^{(N/n+1 \times N/n+1)} = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & \dots & 0 & 0 \\ M_{31} & M_{32} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & M_{ij} & \vdots & \vdots \\ M_{i1} & \dots & \dots & \dots & D_q \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= D_q \\ M_{21} &= C_q \left(\sum_{k=1}^n A_{cl}^{n(1-0)-k} B_{cl} \right) \\ M_{22} &= D_q \\ M_{31} &= C_q \left(\sum_{k=1}^n A_{cl}^{n(2-0)-k} B_{cl} \right) \\ M_{32} &= C_p \left(\sum_{k=1}^n A_{cl}^{n(2-1)-k} B_{cl} \right) \\ M_{i1} &= C_p \left(\sum_{k=1}^n A_{cl}^{n(t-0)-k} B_{cl} \right) \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} M_{ii} &= D_q \quad (i = 1 \dots M/n + 1) \\ M_{ij} &= C_q \sum_{k=1}^n A_{cl}^{n(i-j)k} B_{cl} \quad i \neq j \quad (i > j) \\ & \quad (i = 1 \ 2 \dots M/n + 1) (j = 1 \ 2 \dots M/n + 1) \\ M_{ij} &= 0 \quad (i < j) \end{aligned}$$

そして、ステップ入力を加えた際の上式の要素の上限値を \tilde{S}_{qj} とした際のステップ応答列 \tilde{M}_{qj} は

$$\tilde{M}_{qj} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_{qj}(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{S}_{qj}(1) & \tilde{S}_{qj}(0) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{S}_{qj}(N) & \tilde{S}_{qj}(N-1) & \dots & \tilde{S}_{qj}(1) & \tilde{S}_{qj}(0) \end{pmatrix}$$

となる。よって

$$\tilde{Q} = \tilde{M}_{qj} \Delta \tilde{G} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{G} &= [\Delta \tilde{g}^T(0) \quad \Delta \tilde{g}^T(1) \quad \Delta \tilde{g}^T(2) \dots \quad \Delta \tilde{g}^T(N/n)]^T \\ & \quad (\Delta \tilde{G} = \sum_{i=0}^t \Delta \tilde{g}(i)) \end{aligned}$$

$$\tilde{Q} = [\tilde{q}^T(0) \quad \tilde{q}^T(1) \quad \tilde{q}^T(2) \dots \quad \tilde{q}^T(N/n)]^T$$

である。また、同様に

$$\tilde{Q} = \tilde{M}_{qj} \Delta \tilde{G} \quad (10)$$

と求まる。つまり

$$\tilde{q}_{mj} \leq \tilde{M}_{qj} \Delta \tilde{G} \quad (11)$$

$$\tilde{M}_{qj} \Delta \tilde{G} \leq \tilde{q}_{mj} \quad (12)$$

上式をLMIとして定式化すると

$$\begin{aligned} \text{diag}(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_l) &< 0 \\ c_l &= (\tilde{q}_{mj})_l - (\tilde{M}_{qj} \Delta \tilde{G})_l \\ \text{diag}(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_l) &< 0 \\ d_l &= (\tilde{M}_{qj} \Delta \tilde{G})_l - (\tilde{q}_{mj})_l \end{aligned}$$

4 三慣性システムによるシミュレーション

三慣性システムを用いて理論の妥当性を検討する。三慣性システムは以下のような状態方程式が与えられ、

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (13)$$

$$y = Cx \quad (14)$$

と表記することができる。

また、各A, B, C行列は以下のように表記することができる。

$$x = [\theta_1 \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_3]^T \quad (15)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

$$B = [0 \quad 1/J_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (16)$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T \quad (17)$$

$$a_{21} = -k_1/J_1, \quad a_{22} = -c_1/J_1$$

$$a_{23} = k_1/J_1, \quad a_{41} = k_1/J_2$$

$$a_{43} = -(k_1 + k_2)/J_2, \quad a_{44} = -c_2/J_2$$

$$a_{45} = k_2/J_2, \quad a_{63} = k_2/J_2$$

$$a_{65} = -k_2/J_2, \quad a_{66} = -c_3/J_2 \quad \text{ただし, } J_1, J_2, J_3$$

は各ディスクの慣性モーメント[kgm²], k_1, k_2 は各サンプリングのばね定数[N/rad], c_1, c_2, c_3 は各ディスクにかかるダンピング係数[N/rad/s]である。

このシステムのディスク1に錘を付加した場合、 J_1 が変動する。この変動によって、従来のリファレンスガバナでは拘束条件を破ってしまう。以下にシミュレーションの結果を示す。

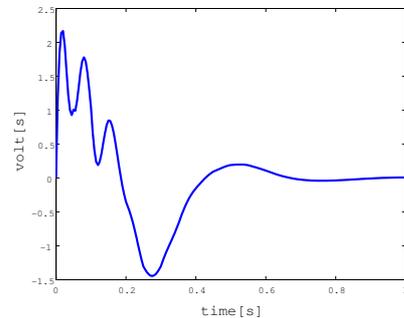


図 4: 制御入力

図4より、限界電圧1.8voltを大きく超える制御入力が生成されている。これは、モデルが変動したことにより拘束条件が破られてしまったことから起きている。ただし目標値には追従している。

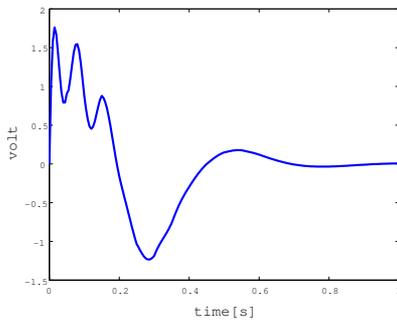


図 5: 制御入力

図5は新たに拘束条件を導入した場合の制御入力である。グラフより限界電圧1.8volを超えずに制御入力が生成できていることがわかる。このことから新たに導入した拘束条件を導入することによって、拘束条件を破らない制御入力ができ、本研究の有用性が証明できた。

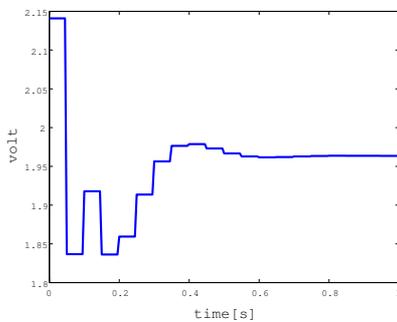


図 6: 生成入力

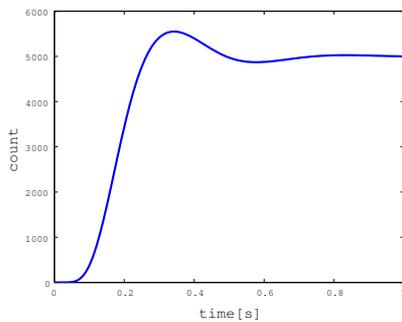


図 7: 制御出力

図7より、拘束条件を導入しても安定性が保障されていることがわかる。このことから新たに導入した拘束条件を導入することによって、拘束条件を破らない制御入力ができ、本研究の有用性が証明できた。

5 研究成果

本研究によって以下のような成果がえられた。

- ・拘束システムに対してロバスト性を保障した
- ・問題をLMIとして定式化した。
- ・シミュレーションを行い理論の妥当性を確認できた。

参考文献

- [1] 小木曾, 平田: 状態アフィン関数によるリファレンスガバナの構成法と制御検証実験, 計測自動制御学会論文集, 40-2, 247/256 (2004)
- [2] 鈴木, 杉江: 複数の入出力基底情報を用いた拘束システムのロバストな目標値整形, 計測自動制御学会論文集, 42-8, 869/876 (2006)
- [3] 杉江, 福井: 不確かさを考慮した拘束システムの目標値整形とその実験検証, システム制御情報学会論文誌, 17-2, 73-80 (2004)
- [4] 小木曾, 平田: 変数のブロッキングを用いて表現される拘束システムに対するリファレンスガバナ, 計測自動制御学会論文集, 41-1, 88/90 (2005)
- [5] 畑中, 鷹羽: 外乱を受ける拘束システムに対するリファレンスガバナの設計法, 計測自動制御学会論文集, 40-8, 806/814 (2004)
- [6] T.sugie and H.suzuki: Robust Robust reference shaping of peri-odic trajectories for systems with state/input constraints, In Proceedings of IEEE Conference on Control Applications 2004, 1668/1673, Taipei(2004)
- [7] 藤森 篤: ロバスト制御, コロナ社 (2001)
- [8] 野波 健蔵: 制御系設計, 東京電気大学出版局 (2003)
- [9] 大原, 平田: 参照入力集合パラメトリゼーションにもとづく拘束システムの制御, 計測自動制御学会論文集, 40-8, 796/805 (2004)
- [10] 杉江, 山本 著: 状態および入力の制約を考慮した閉ループ系の目標値生成, 計測自動制御学会論文集, 37-No.9, 849/855 (2001)
- [11] 小島 伸也: 拘束システムに対するリファレンスガバナの実現南山大学大学院修士論文 (2006)