勝ち抜き数理モデルと順位付け数理モデルの解析

M2005MM030 須崎 政文
指導教員 尾崎 俊治

1 はじめに

本研究は勝ち抜きの数理モデルと順位付けの数理モデルの解析をおこなっている．一般的に，勝ち抜きや順位付けはなんらかの勝負事の目的である．すなわち，勝負事とは勝ち抜きや順位付けの手段である．

特に，スポーツの分野では勝ち抜きはトーナメント，順位付けはリーグ戦と対応していることが多い．トーナメントが 1 位のみ（2 位，時として 3 位も）を決定するのに対して，リーグ戦は全参加者の順位を決定する．例えば，日本の J リーグでは天皇杯はトーナメントであり，J1 や J2 はリーグ戦である．

数学的にはトーナメントは $\log N$（底は 2 である [4]）のオーダ，リーグ戦は N^2 のオーダであることはよく知られている．すなわち，1 位のみを決定するなら $\log N$ のオーダで済むが全順位を決定するならば N^2 のオーダが必要になってしまう．

単純に勝者を決定するだけならばトーナメントで十分なはずなのになぜ人々はリーグ戦を求めるのだろう．$N^2 - \log N$ にその答えが含まれている．人々は完全な強さの位を知りたいのである．トーナメントでは分からない，勝者以外の強さはどれくらいなのか知りたいのである．また，人々はトーナメントが必ずしも強いものが上へ勝ち進むものではないことを知っている．トーナメントの最初の方で強いもの同士が対戦すると人々は残念がる．もっと上のほうでこの対戦を観たかった，と．しかしリーグ戦でそういうことはない．時間はかかるが全ての対戦を観ることができる．$N^2 - \log N$ とはそんな人間の心理を表しているのである．人間とは順位付けが好きな生き物なのである．

しかし，トーナメントが必ずしも強いものが上へ勝ち進むものではないことは見方を変えれば長所でもある．初めから勝敗が分かっている試合ほどつまらないものはない．意外な者が勝ち進んで観客を沸かせるのはトーナメントならではの魅力である．

第 2 節では，リーグ戦の一種である 2006 FIFA W 杯アジア予選においてアジア予選から本大会に出場する確率の計算をおこなった．

以上のようにトーナメントとリーグ戦はどちらも長所があり短所もある．しかし現実的には，トーナメントは参加者が多いときに，リーグ戦は参加者が少ないときに用いられる傾向があるようだ．

スポーツの分野以外に目を向けても勝ち抜きや順位付けは数多くある．日常生活では，コイン投げやじゃんけんといった手軽で，それ自体が一種の遊びのような勝負事が好まれる．コイン投げは欧米で，じゃんけんはアジアでよく用いられている [5].

第 3 節では，じゃんけんによる順位付けの解析をおこない，順位付けが終わるまでの平均と分散を求め，さらに平均と分散が閉じた式の形ではないため近似式を求めた．

第 4 節では，コイン投げによる勝ち抜きの解析をおこない，勝ち抜きが終わるまでの平均と分散を求め，さらに平均が閉じた式の形ではないため漸近解析をおこなった．

2 2006 FIFA W 杯アジア予選から本大会に出場する確率の計算

スポーツ競技会で勝利する確率の計算方法は一般的には，2 つの方法があると考えられる．1 つは確率があらかじめ与えらるものである（確率モデル）．もう 1 つはチーム間の強さが確定的，例えば強さの順序が線形順序集合であるようなもの，である（確定モデル）．

本節では第 2 の方法，すなわち強さの順序が線形順序集合である確定モデルを基に，2006 FIFA W 杯アジア予選から本大会に出場する確率の計算をおこない，トーナメントが必ずしも強いものが上へ勝ち進むものではないことを示す．

2.1 アジア予選から本大会に出場する確率

図 1 は 1 次予選での強さの数字で，1 から 21 までの本大会に出場する確率である．合計が 4 になっているのは本大会に出場するのが 4 チームという意味である．1 は当然どんなチームにも勝つので，本大会に出場する確率が 1 である．2 の確率は 1 次予選で 1 と同じグループになる確率と等しい．もし 2 が 2 次予選に進めたならば，たとえ 2 次予選で 1 と同じグループになっても 2 位になるので，本大会に出場することができる．

また，この表では，確率が 0.01 以上なのは 11 番目の強さのチームまでである．現実的には本大会に出場する希望が持てるのは 11 までで、それ以下は絶望的である．

ただ，21 までが本大会に出場する可能性はある．それ以降は完全に 0 である．

3 順位付けじゃんけんの確率論的解析と近似計算

N 人がじゃんけんによって 1 位から N 位まで順位付けをする問題を考える．

じゃんけんは中国から日本に伝わり，グー（Rock），パー（Paper），チョキ（Scissors）の 3 手で勝敗を決めるゲームとして広く用いられている [5]．グーがパーに勝ち，パーがチョキに勝ち，チョキがグーに勝つというルールで，絶対的に強い手が存在しない代表的な例で

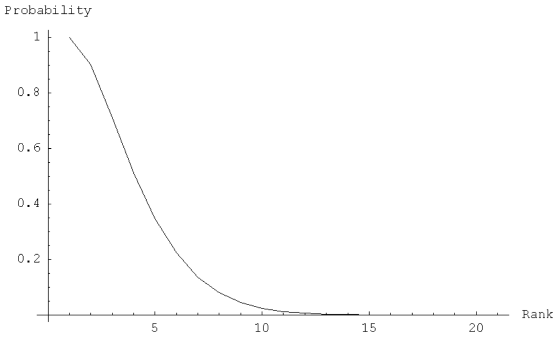

図 1　1 次予選での強さの数字の，1 から 21 までの本大会に出場する確率の図示，横軸が参加国の強さの数字，縦軸が確率

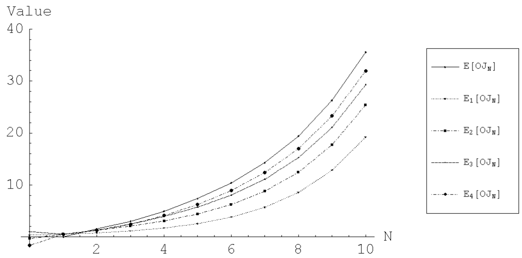

図 2　N が 10 までの平均と各近似式

ある．じゃんけんと同質のものは世界各地に分布しており，例えばインドネシアでは象が人に勝ち，人が蟻に勝ち，蟻が象に勝つというルールが用いられている．じゃんけんは現在は欧米でもよく知られている．特にアメリカでは RPS Society があり，ゲームとして普及している．また，欧米では「Rock-Paper-Scissors」が一般によく使用されている名称である．

じゃんけんを Game 理論として考えればそれぞれの確率が 1/3 の混合戦略をとるとすれば，Nash 均衡になっていることが知られている．そして，「コイン投げ」や「丁半」と違い 3 手の中から戦略を選べる点が特徴である．すなわち，ゲームのプレイヤーが戦略を選べるのである．

じゃんけんに関する過去の研究としては [7]，[2] がある．本研究では，順位付けじゃんけんの平均および分散を求めそれらの近似式を求めた．

4　平均の近似式

図 2 は N が 10 までの平均と各近似式を図示したのものである．図の中の $N = 10$ の点で一番上の線が平均である．また，図の中の $N = 10$ の点で一番下の線が第 1 近似式であり，第 4 近似式になるにつれて平均に近づいている．

図 2 で示したように N が小さい場合は必ずしも近似式はよくならないことは明らかである．しかし，第 4 近似式はかなりよい近似になっている．

表 1 は $N = 10,\ 20,\ 30,\ 40$ に対する平均と各近似式の相対誤差である．

表 1　$N = 10,\ 20,\ 30,\ 40$ に対する平均と平均の各近似式の相対誤差

N	近似式 1	近似式 2	近似式 3	近似式 4
10	45.99%	28.65%	17.72%	10.18%
20	7.724%	2.911%	1.748%	1.081%
30	0.971%	0.136%	0.0654%	0.0406%
40	0.142%	0.00598%	0.00197%	0.00116%

相対誤差は

$$100\left(1 - \frac{E_i[OJ_N]}{E[OJ_N]}\right)\% \tag{1}$$

と定義する．ただし，$1 \leq i \leq 4$ である．

N の値が多くなるにつれて各近似式が 0 に収束している．しかし収束速度は第 1 近似式から第 4 近似式になるにつれて速くなっている．

以上より第 1 近似式から第 4 近似式になるにつれて精度が良くなっている．ただし，N が十分に大きければ第 1 近似式で十分な精度が得られる．

この数値例では N が 30 以上であれば，第 1 近似式で十分実用的である．N が 20 辺りまでは第 1，第 2 近似式では実用的ではない．

5　分散の近似式

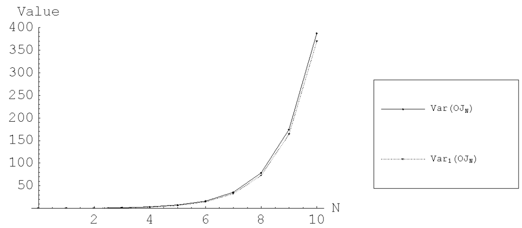

図 3　N が 10 までの分散と第 1 近似式

図 3 は N が 10 までの分散と第 1 近似式を図示したものである．この図からもわかるように，N が小さくてもよい近似になっている．

表 2 は $N = 10,\ 20,\ 30,\ 40$ に対する分散と第 1 近似式の相対誤差である．

相対誤差は

$$100\left(1 - \frac{\mathrm{Var}_1(OJ_N)}{\mathrm{Var}(OJ_N)}\right)\% \tag{2}$$

と定義する．

表 1 と比較すると分散の第 1 近似式は，平均の第 4 近似式よりも精度のよいものになっている．

表 2　N=10，20，30，40 に対する分散と第 1 近似式の相対誤差

N	第 1 近似式
10	4.597%
20	0.3169%
30	0.0158%
40	0.0007%

6　勝ち抜きコイン投げの確率論的解析と漸近解析

N 人から k 人が勝ち抜く問題を考える．この問題は，第 3 者が N 人から k 人を “選ぶ” 問題とは違う．

第 3 者が N 人から k 人を選ぶだけならば単純な組合せであり，特定の個人あるいは集団が k 人の中に入っている確率の問題ならば超幾何分布である．いずれにせよこれらの問題は，問題が単純な分閉じた式の形で解けることが多い．

しかし，第 3 者がいない場合にはまったく別の問題になる．第 3 者がいない場合 N 人内で何らかの勝負事を決め，そのルールに従って k 人を決定することが多い．しかもその勝負事は原則として，参加者にとって平等でなければならない．このような問題は問題が複雑な分閉じた式の形で解くことが難しく，漸化式になっていることが多い．漸化式が “閉じた式の形” で解けない場合には漸近近似，特に O あるいは Θ が求められている [1].

本研究では N 人から k 人が勝ち抜く問題を，コイン投げによって勝敗を決めるとして（勝ち抜きコイン投げと呼ぶ），そのときの

1. 表裏が出る確率は等しく 1/2
2. 一般化して表が出る確率を p，裏が出る確率を $1-p$

のそれぞれの平均，平均の O，分散を求めた．

7　平均

平均は条件付き平均によって求めることができる [3].

公平なコインの勝ち抜きコイン投げの平均の例として図 4 を示す．図 4 は $E[FC_{100;k}]$ の $k=1,\cdots,99$ 間の図で，$k=50$ を中心に左右対称になっている．

一般化されたコインの勝ち抜きコイン投げの平均の例として図 5 を示す．図 5 は $E[GC_{p,100;k}]$ の $p=0.4,\cdots,0.6$，$k=1,\cdots,99$ 間の図で，$p>1/2$ のときは $k=1$ のとき平均が最も大きくなっており，逆に $p<1/2$ のときは $k=99$ のとき平均が最も大きくなっている．

8　平均の O

平均は漸化式であり，閉じた式の形で解けないのでブートストラッピング [1] を用いて O を求める．

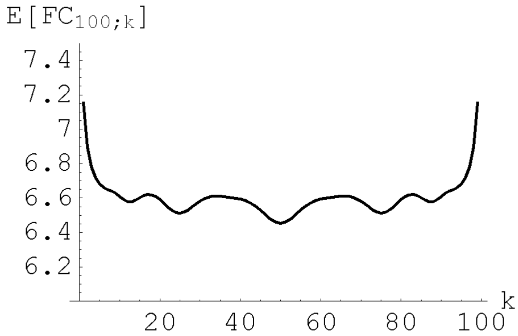

図 4　$E[FC_{100;k}]$ の $k=1,\cdots,99$ 間の図で，$k=50$ を中心に左右対称になっている．

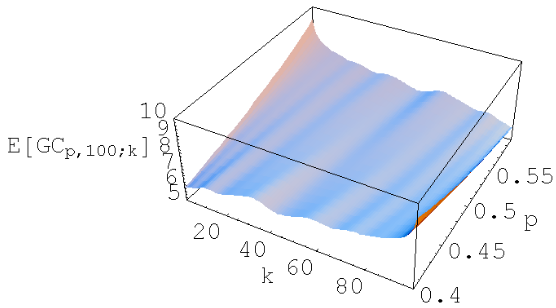

図 5　$E[GC_{p,100;k}]$ の $p=0.4,\cdots,0.6$，$k=1,\cdots,99$ 間の図で，$p>1/2$ のときは $k=1$ のとき平均が最も大きくなっており，逆に $p<1/2$ のときは $k=99$ のとき平均が最も大きくなっている．

$E[FC_{N;k}]$ の O は

$$E[FC_{N;k}] = \mathrm{O}(\log_2 N) \tag{3}$$

となる．

$E[GC_{p,N;k}]$ の O は $1/2 \le p < 1$ のとき

$$E[GC_{p,N;k}] = \mathrm{O}\left(\log_{\frac{1}{p}} N\right) \tag{4}$$

となり，$0 < p \le 1/2$ のとき

$$E[GC_{p,N;k}] = \mathrm{O}\left(\log_{\frac{1}{1-p}} N\right) \tag{5}$$

となる．(3) 式の底が 2 であるのは $p=1/2$ の逆数であることがわかる．

ところで，これらの O は全て k に依存していない．つまり，$k=1,\cdots,N-1$ の中の平均の最大値の O である．$E[FC_{N;k}]$ の最大値は $k=1,N-1$ のときであり，$1/2<p<1$ ときの $E[GC_{p,N;k}]$ の最大値は $k=1$ のと

きであり，$0 < p < 1/2$ ときの $E[GC_{p,N;k}]$ の最大値は $k = N-1$ のときである．

なお，O が最も小さくなるのは $p = 1/2$，つまり公平なコインのときである．しかし，$k = 1, \cdots, N-1$ 間の公平なコインのときの平均が常に最小になるわけではないことに注意されたい．例えば，$E[GC_{0.6,100;99}] = 5.838 < E[FC_{100;99}] = 6.895$ となる．

そこで，平均の相加平均を求める．平均の相加平均は

$$AE(GC_{p,N}) = \frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N-1} E[GC_{p,N;k}] \qquad (6)$$

とする．

(6) 式の O は

$$AE(GC_{p,N}) = \mathrm{O}\left(\log_{\frac{1}{p^2+(1-p)^2}} N\right) \qquad (7)$$

となる．(7) 式に $p = 1/2$ を代入すると log の底が 2 になる．それ以外の値を代入すると 2 よりも小さくなり，O は大きくなる．すなわち，公平なコインのときの平均は，“平均的” には最小である．

9 分散

公平なコインの勝ち抜きコイン投げの分散の例として図 6 を示す．図 6 は $\mathrm{Var}(FC_{100;k})$ の $k = 1, \cdots, 99$ 間の図で，$k = 50$ を中心に左右対称になっている．

一般化されたコインの勝ち抜きコイン投げの分散の例として図 7 を示す．図 7 は $\mathrm{Var}(GC_{p,100;k})$ の $p = 0.4, \cdots, 0.6$，$k = 1, \cdots, 99$ 間の図で，波打った複雑な形になっている．

10 おわりに

第 2 節ではリーグ戦の一種である 2006 FIFA W 杯アジア予選においてアジア予選から本大会に出場する確率の計算をおこなった．

第 3 節では，じゃんけんによる順位付けの解析をおこない，順位付けが終わるまでの平均と分散を求め，さらに平均と分散が閉じた式の形ではないため近似式を求めた．

第 4 節では，コイン投げによる勝ち抜きの解析をおこない，勝ち抜きが終わるまでの平均と分散を求め，さらに平均が閉じた式の形ではないため漸近解析をおこなった．

これらのさらなる発展を考えている．例を挙げると，第 3 節と第 4 節の平均と分散は閉じた式の形で求めることができなかった．しかし，できるなら閉じた式の形で求めたい．ただし，これは大変な作業である．

また，第 4 節では平均の漸近解析をおこなったが分散の漸近解析をおこなっていないので，一連の仕事が終わり次第取り掛かる予定である．

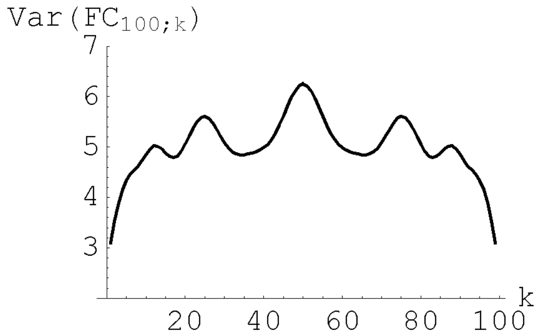

図 6　$\mathrm{Var}(FC_{100;k})$ の $k = 1, \cdots, 99$ 間の図で，$k = 50$ を中心に左右対称になっている．

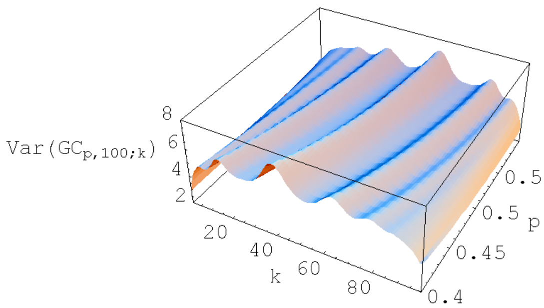

図 7　$\mathrm{Var}(GC_{p,100;k})$ の $p = 0.4, \cdots, 0.6$，$k = 1, \cdots, 99$ 間の図で，波打った複雑な形になっている．

参考文献

[1] R. Graham, D.E. Knuth, O. Patashink, *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, 2nd ed., Addison-Wesley, pp.407-461, 1994.

[2] 伊藤暁，井上克司，王躍，岡崎世雄，ジャンケンの計算量，電子情報通信学会論文誌 (D)，Vol.J86，No.7，pp.452-457，2003.

[3] S.M. Ross, *Introduction to Probability Models*, 8th ed., Academic Press, 2003.

[4] D.E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Vol. 3, 2nd ed., Addison-Wesley, Boston, 1998.

[5] 李御寧，ジャンケン文明論，新潮社，2005.

[6] F. Mosteller, *Fifty Challenging Problems in Probability with Solutions*, Dover, New York, 1965.

[7] Tomoda's Page, (http://www.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/tomoda.html)