ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付け理論

M2005MM036 山田 卓矢

指導教員　國田 寛

1　はじめに

本研究では, 資産価格がジャンプ拡散過程の場合にオプションの価格付けをおこなう. ジャンプ拡散過程の代表的なものとして Merton[3] によって提唱されたモデルがある. これは, ジャンプのパラメータが対数正規分布にしたがうと仮定したもので, 彼は, ヨーロピアン・オプションに対して解析解を示した. 一方, Kou[2] はジャンプの分布が両側指数分布となるモデルを考案し, 彼はこのモデルに対してヨーロピアン・オプション等について解析解を求めた. 本研究では, これら 2 つのモデルに対してアジアン・オプションの価格付けをおこなう. アジアン・オプションには, ペイオフの型によって様々なオプションが存在するが, ここでは, アベレージ・ストライク・オプションに限定して考える. アベレージ・ストライク・オプションとは, 権利行使価格が平均値をとるオプションで, その平均については幾何平均によって求める.

2　原資産価格の方程式

原資産価格 $S(t)$ は,

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(V_i - 1)\right) \tag{1}$$

とする. ここで, $W(t)$ は標準 Brown 運動, $N(t)$ はパラメータ λ の Poisson 過程, $\{V_i\}(>0)$ は独立同一分布の確率変数列, μ は原資産価格の期待収益, σ は原資産価格のボラティリティを表す. 前半の第 2 項までは, B-S モデルでよく知られている価格過程であり, ジャンプ拡散過程では, この式に第 3 項を加えたものとなる. 初期値を $S(0)$ として (1) 式の解は,

$$S(t)=S(0)\exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)}\log V_i\right\} \tag{2}$$

と表される. この $S(t)$ の無限小生成作用素は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}F(S,t) =& \frac{\partial F}{\partial t}(S,t) + \mu S\frac{\partial F}{\partial S}(S,t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}(S,t)\\ &+ \int_{\mathcal{Z}}\{F(Se^z,t) - F(S,t)\}\nu(dz)\end{aligned}$$

となる. ただし, $\nu(dz) = \lambda\pi(dz)$ であり, π は V_i の分布を表す. 原資産価格 $S(t)$ をリスク中立測度 $\mathbf{P}^*$ の下で書き直すと,

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = (r - \lambda\zeta)dt + \sigma dW^*(t) + d\left(\sum_{i=1}^{N(t)}(V_i - 1)\right) \tag{3}$$

となる. ここで, r は利子率, $W^*(t)$ は $\mathbf{P}^*$ の下での標準 Brown 運動, $N(t)$ はパラメータ λ の Poisson 過程, ζ はジャンプ幅の確率変数 $V_i - 1$ の期待値である.

3　アベレージ・ストライク・オプション

価格過程の幾何平均を,

$$G(t) = \exp\left(\frac{1}{t}\int_0^t \log S(u)du\right), 0 < t < T \tag{4}$$

とすると, $G(t)$ の微分は,

$$dG(t) = \frac{G(t)}{t}\log\left(\frac{S(t)}{G(t)}\right)dt \tag{5}$$

で表される. このとき原資産価格 $S(t)$ と $G(t)$ は, 2 次元の確率微分方程式で表されるが, 初期時刻 t_0 に点 (S,G) を出発する解を $(S^{S,G,t_0}(t), G^{S,G,t_0}(t)), t_0 < t < T$ によって表す. リターン過程 $X(t) = \log(S(t)/S(0))$ は,

$$X(t) = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta\right)t + \sigma W^*(t) + \sum_{i=1}^{N(t)}\log V_i \tag{6}$$

であり, 解 $S^{S,G,t_0}(t)$ は,

$$S^{S,G,t_0}(t) = S\exp\{X(t) - X(t_0)\} \tag{7}$$

で表され, これは G によらない. 2 次元拡散過程 $(S(t), G(t))$ の生成作用素は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*(t)U =& \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + (r - \lambda\zeta)S\frac{\partial U}{\partial S}\\ &+ \frac{G}{t}\log\left(\frac{S}{G}\right)\frac{\partial U}{\partial G}\\ &+ \int_{\mathcal{Z}}\{U(Se^z,G,t) - U(S,G,t)\}\nu(dz)\end{aligned}$$

となる.

ペイオフが株価 S と幾何平均 G のオプションを考える. これを $f(S,G)$ とする. 時刻 t_0 でのオプション価格は,

$$\Psi(S,G,t_0) = \mathbf{E}^*[e^{-r(T-t_0)}f(S^{S,G,t_0}(T), G^{S,G,t_0}(T))] \tag{8}$$

となる. 満期では,

$$\Psi(S,G,T) = f(S,G) \tag{9}$$

となる．

上記のオプション価格は, 3 つの変数 (S,G,t) を含んでいるが, ペイオフ関数が $f(S,G)=S\chi(G/S)$ で表されるとき, 変数変換により, 2 変数関数に書き換えることができる．以下で与えられる価格過程を考える．簡単のために, $S(t)=S^{S,G,t_0}(t)$, $G(t)=G^{S,G,t_0}(t)$ とおく．

$$Y(t):=t\log\left(\frac{G(t)}{S(t)}\right)$$

とすると,

$$dY(t)=\log\left(\frac{G(t)}{S(t)}\right)dt+t\frac{dG(t)}{G(t)}-td\log S(t) \quad (10)$$

を得る．(10) 式の第 2 項に, (5) 式を代入すると,

$$\begin{aligned}(10)\text{ 式}&=\log\left(\frac{G(t)}{S(t)}\right)dt+\log\left(\frac{S(t)}{G(t)}\right)dt-td\log S(t)\\ &=-tdX(t) \qquad (11)\end{aligned}$$

となる．したがって,

$$Y(t)-Y(t_0)=-\int_{t_0}^{t}sdX(s), Y(t_0)=t_0\log\left(\frac{G}{S}\right)$$

として表すことができる．$Y(0)=0$ だから,

$$\begin{aligned}Y(t):&=-\int_0^t s\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta\right)ds\\ &\quad-\int_0^t s\sigma dW^*(s)-\int_0^t sd\left(\sum_{i=1}^{N(s)}V_i\right) \quad (12)\end{aligned}$$

となる．

次に,

$$\frac{d\mathbf{P}^0}{d\mathbf{P}^*}=e^{-rt}\frac{S(t)}{S}$$

として, 新たな確率測度 $\mathbf{P}^0$ を導入する．ギルサノフの定理より, $W^0(t):=W^*(t)-\sigma t$ が $\mathbf{P}^0$ の下での Brown 運動であり,

$$\begin{aligned}dY(t)&=-t\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta\right)dt\\ &\quad-t\sigma dW^0(t)-td\left(\sum_{i=1}^{N(t)}V_i\right) \qquad (13)\end{aligned}$$

が新しいジャンプ拡散過程となる．生成作用素は,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^0(t)U&=\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2t^2\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta\right)t\frac{\partial U}{\partial y}\\ &\quad+\int_{\mathcal{Z}}\{U(y-tz)-U(y)\}e^z\nu(dz) \quad (14)\end{aligned}$$

となる．オプション価格 $\Psi(S,G,t)$ を求めるために価格関数 $W(y,t), 0<t<T$ を以下に定義する．

$$W(y,t):=\mathbf{E}^0\left[\chi\left(e^{\left\{\frac{y+Y(T)-Y(t)}{T}\right\}}\right)\right]. \qquad (15)$$

また, 満期では, $W(y,T)=\chi(e^{\frac{y}{T}})$ となる．

プット・オプションの価格式

ペイオフ関数が,

$$f(S,G)=\max\{G-S,0\},$$

$$\chi(e^{\frac{y}{T}})=\max\left\{e^{\left\{\frac{y+Y(T)-Y(t)}{T}\right\}}-1,0\right\}$$

で与えられるとき, その価格関数は,

$$\begin{aligned}&W(y,t)\\ &=\mathbf{E}^0\left[\max\left\{e^{\left\{\frac{y+Y(T)-Y(t)}{T}\right\}}-1,0\right\}\right]\\ &=\int_{-y}^{\infty}\left(e^{\frac{y+Y}{T}}-1\right)f(Y,t)dY \qquad (16)\end{aligned}$$

となる．ここで,

$$f(Y,t)dY=\mathbf{P}^0(Y(T)-Y(t)\in dY) \qquad (17)$$

となる．この計算をしていく上で, まず, $Y(T)-Y(t)$ の分布について知る必要がある．

補題 3.1. $Y(T)-Y(t)$ の分布は次の確率変数の分布と同じである．

$$X+\sum_{i=1}^{N(T-t)}\mathcal{Y}_i^{(Z)}.$$

ここで,

1) X は平均 $-\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta\right)(T^2-t^2)$, 分散 $\frac{1}{3}\sigma^2(T^3-t^3)$ の正規確率変数．
2) $\mathcal{Y}_i^{(s)}, i=1,2,\ldots$ は独立同一分布 $\pi_s(A)=\nu_s(A)/\lambda_s$ にしたがう確率変数列．ただし, $\nu_s(A)=\int_{A/s}e^z\nu(dz)$ であり,$\lambda_s=\nu_s(\mathbf{R})$．
3) Z は区間 $[t,T]$ 上の一様分布で, $\tilde{\lambda}=\frac{1}{T-t}\int_t^T\lambda_s ds$ としたとき, 分布密度 $\frac{1}{T-t}\cdot\frac{\lambda_s}{\tilde{\lambda}}$ にしたがう確率変数．
4) N はパラメータ $\tilde{\lambda}(T-t)$ の *Poisson* 分布．
5) $X,\{\mathcal{Y}_i^{(s)}, s\in[t,T]\}, i=1,2,\ldots,Z,N$ は独立．

注, 詳細は, 本論を参照．

補題 3.1 によって $Y(T)-Y(t)$ の分布が X と $\mathcal{Y}_i^{(s)}$ の分布によって定まることがわかる．これ以降でそれぞれのモデルを計算していくが, Merton モデルでは, $\mathcal{Y}_i^{(s)}$ が対数正規分布にしたがうと仮定したモデルであり, Kou モデルでは, 両側指数分布にしたがうと仮定している．

4 Merton モデルによるオプション価格式

$X+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{Y}_i^{(s)}$ の分布関数を $F_n^{(s)}(x)$ とすると, $X+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{Y}_i^{(Z)}$ の分布関数は,

$$F_n(x)=\frac{1}{T-t}\int_t^T\frac{\lambda_s}{\tilde{\lambda}}F_n^{(s)}(x)ds$$

であり, $Y(T)-Y(t)$ の分布関数 $F(x,t)$ は,

$$F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tilde{\lambda}(T-t)}(\tilde{\lambda}(T-t))^n}{n!}F_n(x)$$

となる.

上記の結果により, Merton モデルでの分布を求めることができる.

Merton モデルのとき, $Y(T)-Y(t)$ の分布密度関数 $f(x,t)=F'(x,t)$ は,

$$f(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tilde{\lambda}(T-t)}(\tilde{\lambda}(T-t))^n}{n!}f_n(x) \qquad (18)$$

である. ここで f_n は正規分布密度の時間平均で与えられ,

$$f_n(x)=\frac{1}{T-t}\int_t^T\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n^{(s)}}\exp\left\{-\frac{(x-\mu_n^{(s)})^2}{2(\sigma_n^{(s)})^2}\right\}ds \qquad (19)$$

である. ただし,

$$\mu_n^{(s)}=-\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta\right)(T^2-t^2)+ns(\mu_V+\sigma_V^2),$$

$$(\sigma_n^{(s)})^2=\frac{1}{3}\sigma^2(T^3-t^3)+ns^2\sigma_V^2,$$
$$\tilde{\lambda}=\lambda_s=\lambda e^{\mu_V+\frac{1}{2}\sigma_V^2}$$

である. ここで, μ_V, σ_V は $\mathcal{Y}_i$ の平均と分散を表す.

(16) 式より,

$$\begin{aligned}W(y,t)&=\int_{-y}^{\infty}\left(e^{\frac{y+Y}{T}}-1\right)f(Y,t)dY\\&=\int_{-y}^{\infty}e^{\frac{y+Y}{T}}f(Y,t)dY-\int_{-y}^{\infty}f(Y,t)dY\end{aligned} \qquad (20)$$

となる. それぞれの項を順次計算していくと,

$$\begin{aligned}W(y,t)=\frac{1}{T-t}\sum_{n=0}^{\infty}&\frac{e^{-\tilde{\lambda}(T-t)}(\tilde{\lambda}(T-t))^n}{n!}\\&\times\left[\int_t^T\exp\left\{\frac{y+\mu_n^{(s)}}{T}+\frac{(\sigma_n^{(s)})^2}{2T^2}\right\}\right.\\&\times\Phi\left(\frac{y+\frac{1}{T}(\mu_n^{(s)}T+(\sigma_n^{(s)})^2)}{\sigma_n^{(s)}}\right)ds\\&\left.-\int_t^T\Phi\left(\frac{y+\mu_n^{(s)}}{\sigma_n^{(s)}}\right)ds\right]\end{aligned} \qquad (21)$$

となる. ただし, Φ は標準正規分布の分布関数.

定理 4.1. プット・オプションの価格式 $\Psi_P(S,G,t)$ は,

$$\begin{aligned}\Psi_P(S,G,t)&=SW\left(t\log\left(\frac{G}{S}\right),t\right)\\&=\frac{S}{T-t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\tilde{\lambda}(T-t)}(\tilde{\lambda}(T-t))^n}{n!}\\&\quad\times\left[\int_t^T\left(\frac{G}{S}\right)^{\frac{t}{T}}\exp\left\{\frac{\mu_n^{(s)}}{T}+\frac{(\sigma_n^{(s)})^2}{2T^2}\right\}\right.\\&\quad\times\Phi\left(\frac{t\log\left(\frac{G}{S}\right)+\frac{1}{T}(\mu_n^{(s)}T+(\sigma_n^{(s)})^2)}{\sigma_n^{(s)}}\right)ds\\&\quad\left.-\int_t^T\Phi\left(\frac{t\log\left(\frac{G}{S}\right)+\mu_n^{(s)}}{\sigma_n^{(s)}}\right)ds\right]\end{aligned} \qquad (22)$$

である.

5 Kou モデルによるオプション価格式

(16) 式よりプット・オプションの価格関数 $W(y,t)$ は,

$$\begin{aligned}W(y,t)&=\mathbf{E}^0\left[\max\left\{e^{\frac{y+Y(T)-Y(t)}{T}}-1\right\}^+\right]\\&=\mathbf{E}^0\left[\left(e^{\frac{y+Y(T)-Y(t)}{T}}-1\right)\mathbf{1}_{\{Y(T)-Y(t)\geq -y\}}\right]\\&=\mathbf{E}^0\left[e^{\frac{y+Y(T)-Y(t)}{T}}\mathbf{1}_{\{Y(T)-Y(t)\geq -y\}}\right]\\&\quad-\mathbf{P}^0[Y(T)-Y(t)\geq -y]\end{aligned} \qquad (23)$$

である.

定理 5.1. 確率 $\mathbf{P}^0$ の下で,

$$\Upsilon(\alpha,\sigma,\lambda,p,\eta_1,\eta_2;a,T):=\mathbf{P}^0[Y(T)\geq a] \qquad (24)$$

と定義する. ここで,

$$dY(t)=-t\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2-\lambda\zeta\right)-t\sigma dW^0(t)-td\left(\sum_{i=1}^{N(t)}\log V_i\right)$$

であり, $W^0(t)$ は *Brown* 運動, $N(t)$ はパラメータ λ の *Poisson* 過程, $\log V_i$ は独立で同一分布 ν をもつパラメータ p,η_1,η_2 の両側指数分布, すなわち,

$$\begin{aligned}&\nu(dz)=\lambda f_{\mathcal{Y}}(z)dz,\\&f_{\mathcal{Y}}(z)=p\eta_1e^{-\eta_1z}\mathbf{1}_{\{z\geq 0\}}+q\eta_2e^{\eta_2z}\mathbf{1}_{\{z<0\}}\end{aligned} \qquad (25)$$

にしたがう. ただし, $\eta_1>1,\eta_2>0,p,q\geq 0,p+q=1$ とする. Υ の解析解は *Kou[2]* に示されている.

ゆえに, (23) 式の第 2 項は,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^0[Y(T)-Y(t)\geq -y]&=\frac{1}{T-t}\\&\times\int_t^T\Upsilon\left(\dot{\mu},\dot{\sigma},\dot{\lambda},\dot{p},\dot{\eta}_1(s),\dot{\eta}_2(s);-y,T-t\right)ds\end{aligned} \qquad (26)$$

で表すことができる. 各パラメータは,

$$\dot{\lambda} = \lambda\left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1}\right),$$

$$\dot{p} = \frac{\frac{p\eta_1}{\eta_1-1}}{\frac{p\eta_1}{\eta_1-1} + \frac{q\eta_2}{\eta_2+1}}, \dot{q} = 1 - \dot{p},$$

$$\dot{\eta}_1(s) = \frac{\eta_1 - 1}{s}, \dot{\eta}_2(s) = \frac{\eta_2 + 1}{s},$$

$$\dot{\mu} = -\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta\right)(T + t),$$

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{3}\sigma^2(T^2 + tT + t^2)$$

である. 次に, 第 1 項を計算するために, 新しい確率測度 $\tilde{\mathbf{P}}$ を以下で導入する.

$$\mathbf{E}^0\left[e^{\frac{y+Y(T)-Y(t)}{T}}\mathbf{1}_{\{Y(T)-Y(t)\geq -y\}}\right] = e^{\frac{y}{T}}\tilde{\beta}_T\tilde{\mathbf{P}}[Y(T) - Y(t) \geq -y]. \quad (27)$$

ただし,

$$\tilde{\beta}_T = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta\right)\frac{T^2 - t^2}{T} + \frac{\sigma^2}{6}\frac{T^3 - t^3}{T^2} + \int_t^T(\tilde{\lambda}(s) - \tilde{\lambda}(0))ds\right\}$$

である. (27) 式を計算するために以下の定理を用いる.

ギルサノフの定理により確率 $\tilde{\mathbf{P}}$ の下で,

1) $\tilde{W}(t) = W^0(t) + \int_0^t \sigma\frac{s}{T}ds$ は, 標準 Brown 運動となる.

2) $e^{z(1-t/T)}dt\nu(dz)$ が $N(dtdz)$ の $\tilde{\mathbf{P}}$ による平均となる.

このことから,

$$\tilde{\mathbf{P}}[Y(T) - Y(t) \geq -y] = \frac{1}{T-t}\int_t^T\frac{\tilde{\lambda}(s)}{\tilde{\lambda}} \times\Upsilon\left(\tilde{\mu}, \dot{\sigma}, \tilde{\lambda}, \tilde{p}(s), \tilde{\eta}_1(s), \tilde{\eta}_2(s); -y, T - t\right)ds \quad (28)$$

となる. 各パラメータは,

$$\tilde{\lambda}(s) = \lambda\left(\frac{p\eta_1}{\eta_1 - 1 + s/T} + \frac{q\eta_2}{\eta_2 + 1 - s/T}\right),$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{T-t}\int_t^T\tilde{\lambda}(s)ds,$$

$$\tilde{p}(s) = \frac{\frac{p\eta_1}{\eta_1-1+s/T}}{\frac{p\eta_1}{\eta_1-1+s/T} + \frac{q\eta_2}{\eta_2+1-s/T}}, \tilde{q}(s) = 1 - \tilde{p}(s),$$

$$\tilde{\eta}_1(s) = \frac{\eta_1 - 1}{s} + \frac{1}{T}, \tilde{\eta}_2(s) = \frac{\eta_2 + 1}{s} - \frac{1}{T},$$

$$\tilde{\mu} = \dot{\mu} - \frac{\dot{\sigma}^2}{T}$$

である. 価格関数は,

$$W(y,t) = \frac{1}{T-t}\left[\int_t^T\frac{\tilde{\lambda}(s)}{\tilde{\lambda}}\tilde{\beta}_T e^{\frac{y}{T}} \times\Upsilon\left(\tilde{\mu}, \dot{\sigma}, \tilde{\lambda}, \tilde{p}(s), \tilde{\eta}_1(s), \tilde{\eta}_2(s); -y, T - t\right)ds - \int_t^T\Upsilon\left(\dot{\mu}, \dot{\sigma}, \dot{\lambda}, \dot{p}, \dot{\eta}_1(s), \dot{\eta}_2(s); -y, T - t\right)ds\right] \quad (29)$$

となる.

定理 5.2. アベレージ・ストライク・プット・オプションの価格式 $\Psi_P(S, G, t)$ は,

$$\Psi_P(S,G,t) = SW\left(t\log\left(\frac{G}{S}\right), t\right)$$

$$= \frac{S}{T-t}\left[\int_t^T\frac{\tilde{\lambda}(s)}{\tilde{\lambda}}\tilde{\beta}_T\left(\frac{G}{S}\right)^{\frac{t}{T}} \times\Upsilon\left(\tilde{\mu}, \dot{\sigma}, \tilde{\lambda}, \tilde{p}(s), \tilde{\eta}_1(s), \tilde{\eta}_2(s); -t\log\left(\frac{G}{S}\right), T - t\right)ds - \int_t^T\Upsilon\left(\dot{\mu}, \dot{\sigma}, \dot{\lambda}, \dot{p}, \dot{\eta}_1(s), \dot{\eta}_2(s); -t\log\left(\frac{G}{S}\right), T - t\right)ds\right] \quad (30)$$

となる.

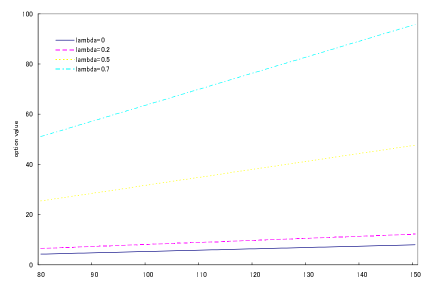

図 1　初期資産を変化させた Merton モデル

6　考察

Merton モデルによる価格評価では, ヨーロピアン・オプションと同様にポアソン分布と正規分布にしたがう部分に分けて価格式を求めることができた. また, Kou モデルの場合, 彼が導入した関数 Υ は, アジアン・オプションにも用いることができた.

参考文献

[1] Ishihara, M. and Kunita, H., Asian Strike Options of American Type and Game Type, preprint.

[2] Kou, S. G., A Jump-Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science* **48**, 1086-1101, (2002).

[3] Merton, R. C., Option Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous, *Journal of Financial Economics* **3**, 125-144, (1976).