外乱抑制を目的としたILQ設計法
– 3慣性システムへの応用 –

M2004MM001 坂野　誠一

指導教員　高見　勲

1　はじめに

1.1　ILQ の現状

サーボ系設計問題は実用上重要な問題であり, これまでにさまざまな設計法が提案されてきた．なかでも「最適サーボ系の設計法」は, 実システムにも広く用いられてきた手法の一つである．ところが, その基礎となっている最適レギュレータ (LQ) 設計法では, 評価関数の重みが閉ループ応答などの工学的な仕様と明確に結びついていないのでその選定が本質的に難しく, 実用上の難点となっている．一方, 利点として重みの選択によらず一般に, 低感度特性やロバスト安定性など優れた性質をもつことが知られている．そこで最適制御の逆問題の結果を利用した, ILQ 設計法というものが提案されている [1]. ILQ の特徴は, 最適レギュレータのもつ有用性を維持しつつも, 現代制御の問題点でもあった調整の難しさが改善されていること, 設計仕様を高次遅れ応答時定数として与えることができることである．これまでにロバストサーボ系 [2] の枠組みで目標値を指定できる ILQ サーボ設計法 [3], 一般化オブザーバの自由度を利用してループ整形機能を有した ILQ 設計法や [4], 2自由度制御のフィードフォワード項の冗長性を利用し過渡応答に関するロバスト性を考慮した ILQ サーボ系の設計法など [5], 種々の特徴をもつ ILQ 設計法が提案されている．また, 実用性の高さからいくつかの実システムにも適用され, 良好な結果を得てきた [6] [7] .

1.2　本論文の特徴

工作機械や産業用ロボットなどに代表される位置決め制御装置は, モデル化誤差, 摩擦などのほかに, 特に外乱に対する制御系の効果が求められている．しかし, ILQ 設計法は実用的な設計法であるにもかかわらずこの制御法による枠組みにおいて外乱抑制を陽に考慮した研究は少ない．そこで, 本論文では外乱抑制を有する ILQ 制御法を考える．具体的には, 工作機械や産業用ロボットなどの製品に使用するモデルとしてはよく知られた 3 慣性系モデルを制御対象として, まず外乱モデルを構成して, 外乱オブザーバにより推定することを考える．そして外乱モデルを含む拡大系に対して ILQ 制御法を構成し, 外乱抑制を有する ILQ 制御法を考える．3 慣性系のような振動系に加わる外乱には大きく分けてインパルス入力に代表される過渡的外乱と調和励振力のような持続的外乱とがある．前者に対してはフィードバック形が, 後者に対してはフィードフォワード形が有効であることが知られている．そこで本論文では調和励振力のような持続的外乱を受ける場合に対して取り扱う.

2　プラントモデル

図 1 に 3 慣性システムの概略構成を示す．3 慣性システムはトルク $T(t)$ を加えることによって $disc3$ の角度 θ_3 を制御するシステムである．また各ディスクの質量は変えられるため, 慣性モーメントは変更できるようになっている.

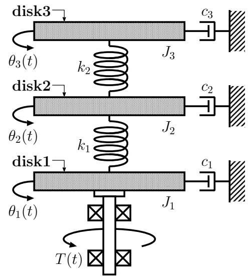

図 1　3 慣性システム

このシステムを状態方程式で記述すると

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$
$$y = Cx \tag{2}$$

ただし, 状態変数 x および, 係数行列 A , B , C ならびに係数行列の要素はつぎのようになる.

$$x = \begin{bmatrix} \theta_1 & \dot{\theta}_1 & \theta_2 & \dot{\theta}_2 & \theta_3 & \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}^T \tag{3}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1/J_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \tag{5}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$a_{21} = -k_1/J_1,\ \ a_{22} = -c_1/J_1,\ \ a_{23} = k_1/J_1$$
$$a_{41} = k_1/J_2,\ \ a_{43} = -(k_1 + k_2)/J_2$$
$$a_{44} = -c_2/J_2,\ \ a_{45} = k_2/J_2$$
$$a_{63} = k_2/J_2,\ \ a_{65} = -k_2/J_2/,\ \ a_{66} = -c_3/J_2$$

ただし, J_1, J_2, J_3 は各ディスクの慣性モーメント $[kgm^2]$. k_1, k_2 は各スプリングのばね定数 $[N/rad]$. c_1, c_2, c_3 は各ディスクにかかるダンピング係数 $[N/rad/s]$. である.

3　ILQ 設計法の概要

本論文で適用する設計法である ILQ 設計法の概要を説明する．まず, ILQ 設計法の特徴としてあげられるのは

1. 閉ループ系の目標応答を指定して設計できる
2. 指定応答を漸近的に達成するための調整パラメータが存在する

である．ILQ 設計理論による設計は, 指定応答を含んだ制御則を導出し, 最適性を保証するための調整パラメータ下限値を算出する, という手順で設計をおこなう．次に示すような可制御かつ, 可観測な線形時不変システムを考える．

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{7}$$

$$y = Cx, \;\; C = \mathrm{col}(c_1, \cdots, c_m) \tag{8}$$

ただし, x は n 次元状態, u は m 次元入力, y は m 次元出力であり, A, B, C は適当な大きさの既知行列で $\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}C = m$ とし, c_i は横ベクトルであり, col(·) は括弧内の i 番目の要素を第 i 行に持つ行列を表す．

ここで (9) 式のように正則な行列 D を定義する．

$$D = \begin{bmatrix} c_1A^{d_1-1}B \\ c_2A^{d_2-1}B \\ \vdots \\ c_mA^{d_m-1}B \end{bmatrix} \tag{9}$$

(9) 式における定数 d_i は次の (10) 式で定義される, 各出力に対応した相対次数である．

$$d_i = \min\{k : c_iA^{k-1}B \neq 0\} \tag{10}$$

ILQ 設計法では漸近的に指定の目標応答を達成することが可能であるから, 目標から出力までの目標閉ループ伝達関数を $G^{\infty}_{yr}(s)$ とすると, 相対次数の範囲でおのおのの目標から出力までを次の (11) 式に示すように指定することができる

$$G^{\infty}_{yr}(s) = \mathrm{diag}\{\frac{\phi_i(0)}{\phi_i(s)}\} \quad (1 \le i \le m) \tag{11}$$

(11) 式の $G^{\infty}_{yr}(s)$ は各調整パラメータ $\sigma_i(i = 1, \cdots, m)$ を無限大にした場合の漸近応答として設計者が指定するものである．このとき 基準ゲインと呼ばれる K は

$$K = D^{-1}N_{\phi}, \tag{12}$$

ただし

$$N_{\phi} = \begin{bmatrix} c_1\phi_1(A) \\ \vdots \\ c_m\phi_m(A) \end{bmatrix} \tag{13}$$

で求まる．ここで LQ の逆問題の解による結果から

$$\begin{bmatrix} K^0_F & K^0_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & I \end{bmatrix}\Gamma^{-1} \tag{14}$$

ただし,

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となるので, 結局 ILQ 設計法によるサーボ系は図 2 のように構成される．

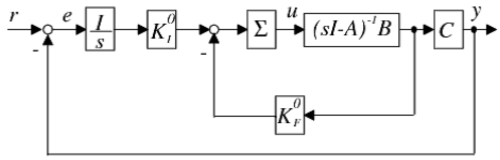

図 2　ILQ 最適サーボ系

ここで 2 図に示される最適サーボ系の拡大状態方程式は次式のように表したとき

$$\dot{x_e} = A_ex_e + B_eu_e \tag{16}$$

$$y = C_ex_e \tag{17}$$

$$u_e = -K_ex_e \tag{18}$$

ただし

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, \; B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \; C_e = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

であり, K^0_F, K^0_I をゲインに持つ第 2 図の制御系が, 重み $Q = C^TC$, $R = \Sigma^{-1}$ をもつ次の線形二次形式評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (x_e^TQx_e + u_e^TRu_e)dt, \tag{20}$$

を最小化するという意味で最適となるためには, 次の 3 条件が成立することが必要十分である．

- $E := \Sigma - K_vB_v - (K_vB_v)^T > 0,$
  $K_v = VK \; , \; B_v = BV^{-1}$
- $Re\lambda(F) < 0,$
  $F := A_K + GH, \;\; A_K = A - BK,$
  $G := B_vE^{-1/2}, \;\; H := E^{-1/2}K_vA_K$
- $\| H(sI - F)^{-1}G \|_{\infty} < 1$

以上が ILQ 設計理論の概要である．

4　目標値応答

ここでは 3 慣性システムの目標値応答を ILQ サーボ系設計法を用いて制御系を構成して, シミュレーションと実験をおこなった結果を示す. 3 慣性システムの相対次数は (10) 式より 6 であるから指定応答である G_{yr}^{∞} を規定する多項式 $\phi_1(s)$ を最も簡単な次の形で与える

$$\phi_1(s) = (s - s_1)^{d_1} \tag{21}$$

ここで $s_i = -1/T_i$ とすれば指定応答として, 6 次遅れ系の伝達関数

$$\frac{1}{(T_i s + 1)^6} \tag{22}$$

で与えることができる. そのときの時定数 T_1 は設計者側が決めることができる設計仕様となる. 以下に時定数 $T_1 = 0.05$ の時の指定伝達関数のステップ応答表およびシミュレーション, 実験結果を示す.

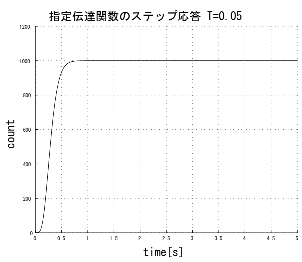

図 3　時定数 $T_1 = 0.05$ のときの指定応答

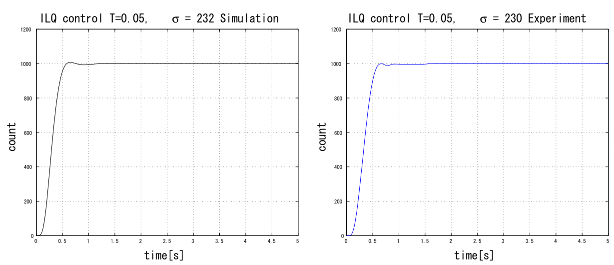

図 4　時定数 $T_1 = 0.05$ 左図：シミュレーション, 右図：実験

ILQ サーボ系設計法で設計したコントローラを用いて目標値応答のシミュレーションを行った. 目標値は 1000[count] とした. count とは 3 慣性系特有の単位で, 2π[rad] = 16000[count] の関係がある. 実機のモデル誤差による影響のためシミュレーションと実験では多少の応答のずれが生じたが, 調整パラメータを調整することによって, シミュレーション, 実験共に指定応答を実現できたといえる.

5　外乱モデルを包括した ILQ 設計法

調和励振力に代表されるような周期外乱を抑えるような制御系を考える. まず入力端への外乱を考慮した次のような状態方程式と出力方程式を考える .

$$\dot{x} = Ax + Bu + Bd \tag{23}$$

$$y = Cx \tag{24}$$

この外乱項を制御するためににまず, 外乱のダイナミクスを微分方程式で記述するためのモデル化を行う. 本研究で取り扱うのは調和励振力に代表されるような周期外乱である. このような周期外乱を以下のようにする [8].

$$d = a\cos\omega t \tag{25}$$

このとき d は 2 階微分方程式

$$\ddot{d} + \omega^2 d = 0 \tag{26}$$

を満たすので, この外乱モデルの状態方程式は

$$\dot{d}_h = A_h d_h \tag{27}$$

ただし

$$A_h = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad d_h = \begin{bmatrix} d \\ \dot{d} \end{bmatrix} \tag{28}$$

と 2 次のシステムとしてモデル化されることがわかる. 式 (27) で表される周期外乱のモデルを組み込んだ拡大系の状態方程式は次のようになる.

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \tag{29}$$

$$\bar{y} = \bar{C}\bar{x} \tag{30}$$

ただし

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & E \\ 0 & A_h \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} B & 0 \end{bmatrix}, \tag{31}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ d_h \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \tag{32}$$

外乱モデルを含む拡大系を構成してその拡大系に対して ILQ 制御法を構成する. ここでは便宜上このような外乱抑制を有する ILQ 設計法を"外乱包括 ILQ"と呼ぶことにする. 外乱包括 ILQ の設計手順を次に示す.

【 外乱包括 ILQ の設計法 】

1. (27) 式のように周期外乱のモデル化を行う.
2. (29), (30) 式のように外乱モデルを含む拡大系を構成する.
3. この拡大システムに対して最小次元オブザーバを構成する.
4. 拡大系の式 (29), (30) に対して式 (10) で定義される相対次数 $\bar{d}_i$ と行列 $\bar{D}$ を求め, $\bar{D}$ の正則性を確認する.
5. 希望応答である $\bar{d}_i$ 次遅れ系の伝達関数の時定数を設計仕様として与える.

6. 拡大系に対するゲイン $\bar{K}$ を (13) 式から求める.
7. 拡大系に対する式 (14) は

$$\left[\begin{array}{cc} \bar{K}_F^0 & \bar{K}_I^0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \bar{K} & I \end{array}\right] \bar{\Gamma}^{-1} \tag{33}$$

ただし

$$\bar{\Gamma} = \left[\begin{array}{cc} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{array}\right] \tag{34}$$

であるから, これをもとに $\bar{K}_F^0$, $\bar{K}_I^0$ を求める.
8. ゲイン調整パラメータの下限 σ_{min} を計算し, $\sigma > \sigma_{min}$ なる範囲で σ の値を選ぶ.

6　外乱包括 ILQ の実験による検証

次に外乱包括 ILQ で設計したコントローラで外乱応答の実験を行った結果を図 5 示す. 時定数を $T_i = 0.05$ と固定し, 外乱モデルを設計する際の式 (25) において $\omega = 1(1/2\pi[\mathrm{Hz}])$ と仮定した. ILQ 制御だけの外乱応答と, 外乱包括 ILQ で設計し外乱補償器を付加したときの外乱応答を比べた. また付加した外乱の大きさは 4[V] で周波数 1[Hz] の周期外乱である.

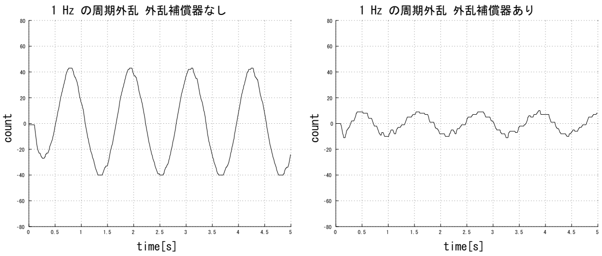

図 5　左図：外乱補償器なし 右図：外乱補償器あり

左グラフは外乱補償器なし, 右グラフは外乱補償器ありの場合である. 補償器をつけたときにはかなり改善されているのがわかる. 次にこの周期外乱用に設計したコントローラを用いて, ステップ状の外乱を付加させたときの応答を図 6 に示す.

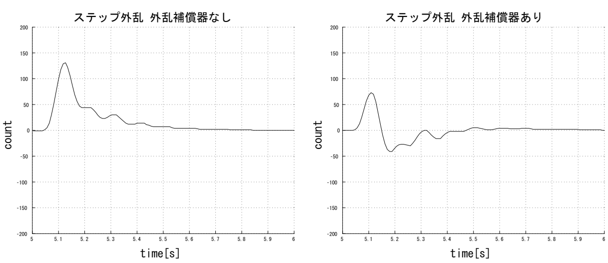

図 6　左図：外乱補償器なし 右図：外乱補償器あり

大きさ 4[V] のステップ状の外乱を付加した. 同様に, 左グラフは外乱補償器なし, 右グラフは外乱補償器ありの場合である. 図よりステップ外乱に対してもある程度の抑制をしているのがわかる.

7　おわりに

本論文では, まずはじめに目標値応答に対して ILQ 設計法の有用性を 3 慣性系システムに対して確認した. そして, 外乱モデルを拡大系の中に取り込み, その拡大系に対して ILQ を設計することにより調和励振力に代表されるような周期外乱を抑制するような, ILQ 設計法を提案した. その際, 最小次元外乱オブザーバを利用して外乱モデルの推定を行った. また, そうして導出される周期外乱用のコントローラは周期外乱だけでなく, ステップ状の外乱にもある程度抑制できることも示した. このような外乱モデルを包括して LQ 制御などで設計する方法はよく知られているが, 時定数 T_i と調整パラメータ σ という直感的に分かりやすい 2 つのパラメータを設定するだけでよいということを考えると, 本論文で提案した ILQ 制御で外乱包括の制御系設計することは非常に有効であると言える.

参考文献

[1] T.Fujii: A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem, *IEEE Trans. Automat. Contr.* , Vol.32, No.11, pp.995-1004 (1987)

[2] E.J.Davison: The robust control of a servomechanism problem for linear time-invariant multivariable systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.* , Vol.21, No.1, pp.25-34 (1976)

[3] 黒江, 安部, 藤井: 参照入力を一般化した ILQ 最適サーボ系設計法, 計測自動制御学会論文集, Vol.32 No.4, pp.539-546 (1996).

[4] 酒井, 藤井: ループ整形機能を有する ILQ ロバストサーボ系の解析的設計法, 計測自動制御学会論文集, Vol.36 No.4, pp.340-347 (2000).

[5] 國松, 藤井, 藤井: 過渡応答のロバスト性を考慮したモデル規範型 ILQ サーボ系の解析と設計, システム制御情報学会論文誌, Vol.17, No.3, pp.131-138 (2004).

[6] 関: ILQ 設計理論を応用したエレベータの振動抑制制御, システム/制御/情報, Vol.47, No.11, pp.599-606 (1998).

[7] 末松, 中島, 辻野, 藤井: ILQ 設計法の多変数磁気浮上系への応用, 計測自動制御学会論文集, Vol.31, No.9, pp.1471-11480 (1995).

[8] 野波, 西村, 崔: 多自由度振動系の外乱相殺制御 (固定面をりようする制振器およびアクティブ動吸振器を用いる場合), 日本機械学会論文集 (C 編), Vol.58 No.545, pp.68-74 (1992).