小売店における季節品の在庫管理
— 需要予測と年間最適発注量の計算 —

M2004MM014 石川 総一郎
指導教員　鈴木 敦夫

1　はじめに

今日, 革新的な技術の発展により, 計算機を用い大規模な配送計画等を求めることが可能になった. 本研究の研究対象である小売店も, 発注, 棚割等を自動的に計算させるシステムを導入している. この導入の背景には, 企業は業務の無駄の排除を行いコスト削減を目指す意図がある. しかし, 小売店の季節品に対する最適発注政策は未知であり, コスト削減の余地がある. この根拠として, 季節品に対し適切な需要予測法が存在しない点である. この背景には, 季節品の需要は気象条件が関係がある考えらている. しかし, 気象条件の予測は非常に難しい. 例えば, 昨年 12 月の寒波は現在の技術でも予測不可能であった. 本研究では少ない情報をもとに季節品に対し需要予測と, 最適発注量を求めるモデルを提案する.

季節品は, ある一定の季節のみ販売できる商品である. 夏の季節品は例えば, すだれ, 水泳用具等である. 冬の季節品は, 暖房器具である. これらの商品は特定の季節に使用する. 需要は使用期間の直前に集まる傾向がある. また, 使用期間があるため, それ以後は需要はない. したがって終了時点での在庫は無駄である. 本研究では, 季節品に対し需要予測と最適発注量を求める.

最適発注量を求める問題で重要なことは, 需要予測のモデル決定である. 例えば, 需要分布を正規分布をとした場合と, 一様分布をとした場合では最適発注量が異なる. これについて, 現在までに様々な需要予測を用い最適発注量を求める研究がなされている. KURAWARWALA[2] は需要をロジスティック曲線で予測し, それに対する最適発注量を求めた.

本研究では, 更に季節品に対し最適週間発注政策を求める. この背景には, 小売店の興味の中に, 季節品の発注スケジュールがあるためである. 季節品の期間終了時の在庫は無駄である. しかし, 発注量を少なくした場合, 極端な品薄の可能性がある. つまり, 顧客の需要に応えることができず, 小売店にとって機会損失である. 本研究では期間の欠品, 在庫を考慮した最適発注政策を求める.

本研究の構成としては, 季節品の需要を数式で表すことと, それに対する最適発注政策を求めることである.

2　季節品の需要予測

本研究で取り扱う季節品の需要の特徴は以下の 2 項目である.

- 季節品の使用時期の直前に需要が集中
- ピーク前の需要は増加傾向, ピーク後の需要は減少傾向

図 1 は, ある夏の季節品の累積需要である. この商品の販売開始は 4 月 1 週である. 20 週目は 8 月最終週であり, 販売終了である. この図 1 より, 12 週目周辺までは増加傾向

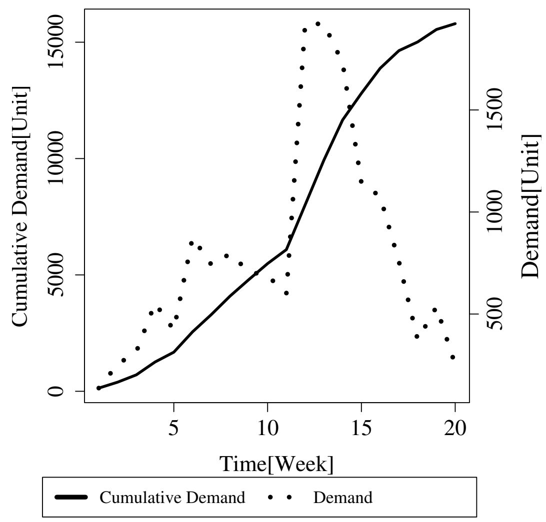

図 1　ある季節品の累積需要

であり, その時刻以降は減少傾向である. この需要を予測する際の重要な問題は以下の 4 点である.

- ピーク時刻の推定
- 最終週の累積需要の推定
- 季節開始時周辺の累積需要の増加傾向
- 季節終了時周辺の累積需要の減少傾向

ここで, 累積需要を議論の対象とする. これは, 1 週単位の予測より精度が高いためである. 本研究では, 季節品に対する BASS[1] モデル予測を提案する.

まず, 予測で用いる記号を定義する.

記号の定義 (需要予測)

(i) i : 年
(ii) t : 週 (適当な時間単位)
(iii) $\mathcal{CD}_i(t)$: i 年の t 週における累積需要
(iv) r_i : i 年の季節評価

季節品の需要は気象条件等に影響される. 季節評価は例えばその年の最高気温である. この影響をモデルに組み込み (1) 式とする.

Bass モデル (予測式)

$$C\mathcal{D}_i(t) = mr_i \left[\frac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p} e^{-(p+q)t}} \right] \tag{1}$$

ここでパラメータは m, p, q である. 各パラメータは正である. m は需要に対する, 年と独立なスケールパラメータである. p, q は形状を決定するパラメータである. $C\mathcal{D}_i(t)$ の傾きは, 瞬間的な需要である.r を入手している条件のもとで最小自乗法を用い p, q, m を求める.

3 在庫管理モデル

本節では, パラメータ p, q, m, r が確率的に変動する場合の最適発注量を求めるモデルを提案する. 本研究では, 連続時間における, 在庫費用等の期待費用和最小化を目指す. 季節品に対する費用は以下の 4 つであると仮定する.

季節品に対する費用内訳

(a) 期間内在庫費用
(b) 期間内欠品費用
(c) 最終処分費用
(d) 最終欠品費用

期間内在庫費用は 1 単位の商品の在庫により店舗で発生する. 期間内欠品費用は 1 単位の商品を不足により店舗で発生する. 一方, 最終処分費用は期間後の商品の残量にかかる. この費用は現実的に高価であると考えられる. 最終欠品費用は, 最終期以降に品物を補充するために発生する. 定式化で用いる記号の定義をする. 確率変数を定義する.

最適化モデルで使用する確率変数

(i) P: BASS モデルにおける p(密度関数 f_P, 積分可能, $P > 0$)
(ii) Q: BASS モデルにおける q(密度関数 f_Q, 積分可能, $Q > 0$)
(iii) M: 年間需要量 (密度関数 f_M, 積分可能, $M > 0$)
(iv) R: 季節評価量 (密度関数 f_R, 積分可能, $R > 0$)
(v) $CD_t(P, Q, M, R)$: 時刻 t の累積需要

P, Q, M, R は互いに独立で正であるとする. アルファベットの大文字は確率変数を示す. 時刻は連続的に定義される. ただし, 時刻 0 における累積需要 CD_0 は確定的に 0 であるとする. 発注量の決定変数を以下のように 2 つ用意する. 2 つ用意する利点は連続時間の最適化問題で議論が簡単になるためである.

決定変数

(i) y_t : 時刻 t の累積発注量
(ii) u_t : 時刻 t の瞬間発注量

この 2 つの変数は (2) 式の関係がある.

$$y_t = \int_0^t u_\tau \mathrm{d}\tau \tag{2}$$

計画期間の最終時刻を T とする. 各費用のパラメータは以下の通りとする.

単位費用

(a) h_1 : 期間内における単位在庫費用
(b) s_1 : 期間内における単位欠品費用
(c) h_2 : 期間終了時の単位処分費用
(d) s_2 : 期間終了時の単位補充費用

次に補助的な関数を定義する. これは定式化を簡単に記述するために用意する. 期間内に発生する瞬間的な費用を $A_t(y_t, CD_t(p,q,m,r))$, 期間終了時に発生する費用を, $B(y_T, CD_T(p,q,m,r))$ とする. $A_t(y_t, CD_t(p,q,m,r))$ は式 (3), $B_T(y_T, CD_T(p,q,m,r))$ は式 (4) にて定義する..

$$\begin{aligned} A_t(y_t, CD_t(p,q,m,r)) =& h_1(y_t - CD_t(p,q,m,r))^+ \\ &+ s_1(CD_t(p,q,m,r) - y_t)^+ \quad (3) \\ B_T(y_T, CD_T(p,q,m,r)) =& h_2(y_T - CD_T(p,q,m,r))^+ \\ &+ s_2(CD_T(p,q,m,r) - y_T)^+ \quad (4) \end{aligned}$$

ここで $(x)^+$ は $\max\{x, 0\}$ である. 本研究では, 以上の記号を用い定式化を行う. 目的関数は時刻 0 より T までの期待費用の最小化である.

目的関数 (最適発注量の計算)

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathcal{E}[\int_0^T (A_t(y_t, CD_t(P,Q,M,R)))\mathrm{d}t \\ & + B_T(y_T, CD_T(P,Q,M,R))] \end{aligned} \tag{5}$$

$\mathcal{E}$ は期待値オペレータである. また制約式は y_t と u_t の関係式を (6) 式, u_t に対する非負条件を (7) 式とする.

制約式 (最適発注量の計算)

$$\frac{\mathrm{d}y_t}{\mathrm{d}t} = u_t, \quad 0 \le t \le T \tag{6}$$

$$u_t \ge 0, \quad 0 \le t \le T. \tag{7}$$

ここで変数変換を行う.

$v_t = e^{-(p+q)t}$, $w = m$, $x = r$, $z_t = mr\dfrac{1 - e^{-(p+q)t}}{1 + \frac{q}{p}e^{-(p+q)t}} = CD_t$ とする. このヤコビアン $\mathcal{J}$ の逆数は存在する. このことから, 式 (5) は式 (8) に変形できる.

$$\int_0^T \int_{z_t} A_t(y_t, z_t) g_t(z_t) \mathrm{d}z_t \mathrm{d}t + \int_{z_T} B_T(y_T, z_T) g_T(z_T) \mathrm{d}z_T \tag{8}$$

ここで $g_t(z_t)$ は (9) 式である.

$$g_t(z_t) = \Pr[CD_t = z_t] \\ = \int_{v_t}\int_{w}\int_{x} \Pr[V_t = v_t, W = w, X = x, Z_t = z_t] \mathrm{d}v_t \mathrm{d}w \mathrm{d}x \tag{9}$$

(8) 式の最適解 y_t は, 不等式 $\frac{s_1}{s_1+h_1} > \frac{s_2}{s_2+h_2}$ が成立するならば, (10) 式より導かれる [2]. ただし G_t は $\int g_t(z_t)\mathrm{d}z_t$ である.

目的関数 (8) 式に対する最適政策

$$y_t^* = \begin{cases} G_t^{-1}\left(\frac{s_1}{s_1+h_1}\right) & 0 \le t \le \hat{t}, \\ G_{\hat{t}}^{-1}\left(\frac{s_1}{s_1+h_1}\right) & \hat{t} \le t \le T. \end{cases} \tag{10}$$

ここで $\hat{t}$ は最適発注停止時刻である. G^{-1} は関数 G の逆関数である. (10) 式にて示される最適政策は, もし $\hat{t}$ 以前ならば $y_t = G_t^{-1}\left(\frac{s_1}{s_1+h_1}\right)$ を解いた y_t が最適累積発注量である. もし, $\hat{t}$ 以後は, 一定値 $G_{\hat{t}}^{-1}\left(\frac{s_1}{s_1+h_1}\right)$ が最適累積発注量である. 尚, 停止時間 ($\hat{t}$) と最適累積発注量 (y^*) は (11) 式, (12) 式より導かれる.

最適発注停止時刻を導く方程式

$$G_{\hat{t}}(y^*) = \frac{s_1}{s_1+h_1} \tag{11}$$

$$\int_{\hat{t}}^{T}(s_1+h_1)G_\tau(y^*)\mathrm{d}\tau - s_1(T-\hat{t}) + s_2 + G_T(y^*)(h_2+s_2) = 0 \tag{12}$$

この積分方程式は解析的に解くことは不可能である. したがって数値計算で $\hat{t}$ を求める.

4　数値例

4.1　需要予測

実際のデータを用い数値実験を行う. データはある小売店の 1 店舗 (愛知県) の夏の季節品の売上である. データは都合上 3 年分 (3 年目は欠損が一部ある) である. この商品に対し実験を行う. 図 2 は, 過去 3 年の累積需要である. 2002 年の総売上個数は 15797 個, 2003 年の総売上個数は 12675 個 , 2004 年は欠損があるが有効な週のみで 16134 個である. 2002 年, 2004 年は売上の傾向が似ている. しかし, 2003 年の売上は他の 2 年とは異なる傾向がある. この差の原因は季節評価であると考えられる. この評価を本実験では**名古屋市の真夏日の日数 (年間)** とした. データは気象庁電子閲覧室[*1]から収集した. データは 2002 年が 76 日, 2003 年が 51 日, 2004 年が 85 日である. これを r とし最小自乗法で予測をした. 表 1 は回帰の結果である. 重決定 R^2 は 0.98 である. 各々の係数の t 値に問題はない. この結果の m の数値より真夏日が 1 日増加することにより約 270 個需要が増加する. 図 3 は 2002 年の予測状況である. またピークは 12.8 週目, すなわち 7 月の中旬辺りといえる.

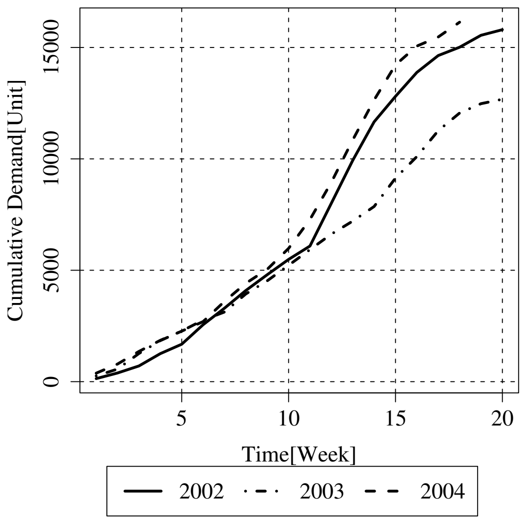

図 2　夏の季節品の累積需要 (3 年分)

表 1　BASS モデルによる回帰結果と t 値

係数	係数予測値	標準偏差	t 値
m	2.7e+02	1.8e+01	14.8
p	1.1e-02	1.1e-03	9.2
q	2.3e-01	2.5e-02	9.3

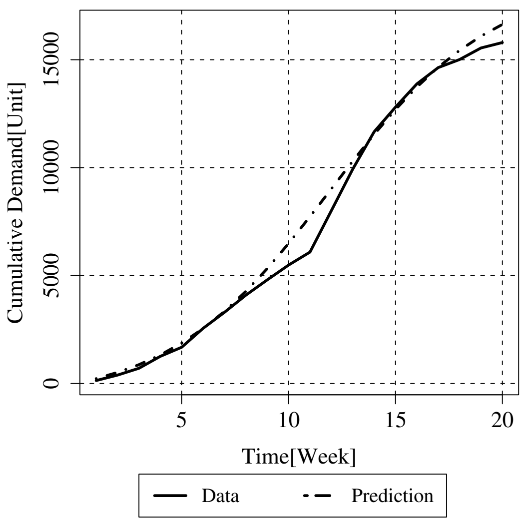

図 3　実際の累積需要と BASS モデル予測値の関係 (2002)

4.2　在庫管理

3 節で示した在庫管理モデルの実験を行う. 数値実験を行うために幾つかの仮定を設けた.

*1 気象庁電子閲覧室 : http://www.data.kishou.go.jp/ .

数値実験に対する仮定

(i) M, P, Q, R は正規分布
(ii) $s_1 = 300, h_1 = 20, s_2 = 300, h_2 = 180$ と設定
(iii) M, P, Q に対するパラメータは 1 を使用
(iv) R は過去のデータより平均 59.6(日), 標準偏差 12.9(日) と設定

数値計算に行うために離散化をした. また, CD の分布関数 $G(y)$ の導出は多重積分になる. 本研究では**モンテカルロ法**を用いた. 乱数の発生個数は 1 変数に対し 15000 とした. 図 4 は 2002 年の累積需要と予測及び発注の関係を表し, 図 5 は 2003 年の関係である. 発注の停止は 17 週である. 2002 年 (図 4) は実際の売上に近い発注政策を導出できた. また最終週でも欠品はない. 一方, 2003 年 (図 5) は在庫過剰になる. 最適年間発注量は 15964 個である. 図 6 より**需要のピーク**以前に**発注のピーク**がある. これは, 需要のピークに対応できるように在庫を準備することが最適であると示している.

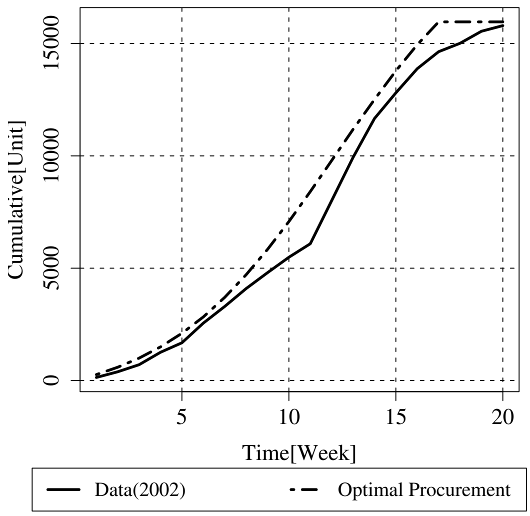

図 4　累積需要と累積最適発注量の関連 (2002)

5 おわりに

本研究では以下の項目を提案した.

- 季節品に対する需要予測方法
- 季節の変動を考慮した年間最適発注量の計算
- 季節品の発注停止時刻

季節品に対する需要予測方法として, BASS モデルを提案した. これら両モデルは係数の決定が正確に行われているのならば, 非常によい精度が得られる. 実際本発表においても, BASS モデルにおいて非常に高い R^2 を導くことができた. 一方, 問題点もある. 本研究では, 事前情報をモデルに組み込むことができなかった. 真夏日の日数も事後情報である. そのため, 在庫管理が確率的に議論をすることしか選択できなかった. この点はさらなる問題点であるが

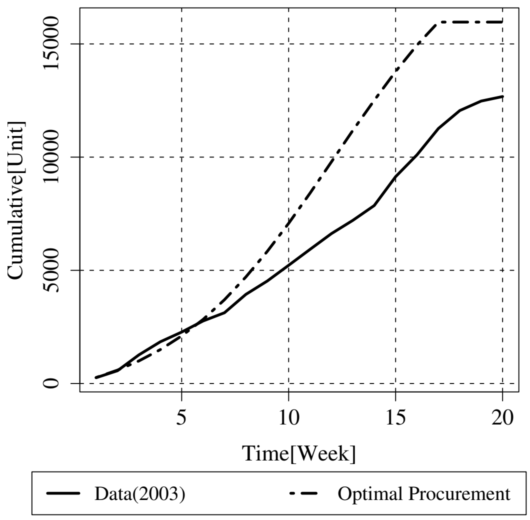

図 5　累積需要と累積最適発注量の関係 (2003)

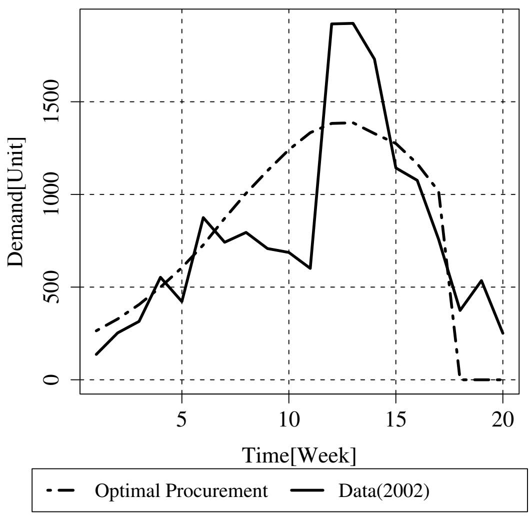

図 6　実需要と最適発注量の関係 (2002)

例えば, 前の年の冬の気温等で予測ができ, それをモデルに組み込めばさらなる発展が望める.

参考文献

[1] BASS, F. M. : A New Product Growth Model for Consumer Durables, *Management Science*,**15**(1967), pp.215-227.

[2] KURAWARWALA, A. A. , MATSUO, H. : Forecasting And Inventory Management Of Short Lifecycle Products, *Operations Research* , **44**(1996) , pp.131-150.