償還条項付き転換社債の評価
– LSM による数値解法 –

M2004MM042 鵜飼 隆之
指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

本稿では，Longstaff and Schwartz[2] によって提唱されたモンテカルロ法と最小 2 乗法を組み合わせた LSM(Least Squares Monte Carlo) を用いて，償還条項付き転換社債の評価をおこなう．償還条項付き転換社債 [1] とは，投資家 (買い手) に満期までの任意の時刻で転換社債を株式に転換できる権利を与え，企業 (売り手) にも満期までの任意の時刻で転換社債を償還できる権利を与えた条件付き請求権である．ただし，企業が償還した際，投資家はその時刻で転換社債を株式に転換するか，企業に償還価格で買い戻されるかを選択することができる．償還条項付き転換社債と転換社債を 2 項モデルと LSM で評価し，乖離率をみることによって LSM の精度を検証し，LSM を用いて転換社債および償還条項付き転換社債を評価する有効な手段であるかということを検証する．

2　償還条項付き転換社債の評価モデル

転換社債と株式からなる企業価値 $V(t)$ は

$$V(t) \equiv CB(t, V(t)) + mS^b(t)$$

と表せる．ただし，$CB(t, V(t))$ は満期 T，額面価格 F の転換社債の時刻 t での価格，$S^b(t)$ は時刻 t で転換社債が転換される前の株価，m は株式発行数であるとする．また，転換価値 $C(t, V(t))$ は n を転換株式数，$S^a(t)$ を転換後の株価とすると

$$C(t, V(t)) = nS^a(t)$$

となる．また転換後の企業価値は

$$V(t) = (n+m)S^a(t)$$

となる．転換価値は希薄化因子 $z = \frac{n}{n+m}$ とすると

$$C(t, V(t)) = zV(t) \tag{1}$$

と表すことができる．

取引期間を有界な閉区間 $[0, T]$ とする．そして，危険資産と無危険資産の 2 種類の資産が取引される市場を想定する．企業価値 $V(t)$ の変動は確率微分方程式

$$dV(t) = \mu V(t)dt + \kappa V(t)dZ(t) \tag{2}$$

で与えられる．μ は期待収益率，κ はボラティリティをあらわし，確率過程 $Z(t)\{t, 0 \le t \le T\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義される標準ブラウン運動である．ここで，無危険資産の価格 $B(t)$ を

$$dB(t) = rB(t)dt \tag{3}$$

とする．ただし，r を無危険利子率，$B(0) > 0$, $r > 0$ とし，リスク中立測度 $\tilde{P}$ を (2) 式の下で P に対して

$$\left.\frac{d\tilde{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu - r}{\kappa}\right)^2 t - \frac{\mu - r}{\kappa}Z(t)\right\} \tag{4}$$

と定義することによって Girsanov の定理により，この確率測度は一意であり，$\frac{V(t)}{B(t)}$ は $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールとなる．また (2) 式はリスク中立測度 $\tilde{P}$ に関して

$$\tilde{Z}(t) = Z(t) + \frac{\mu - r}{\kappa}dt$$

とおくことにより

$$dV(t) = rV(t)dt + \kappa V(t)d\tilde{Z}(t) \tag{5}$$

と書き換えられる．これは $\tilde{P}$ の下で標準ブラウン運動である．この式の解は

$$V(t) = V(0)\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\kappa^2\right)t + \kappa\tilde{Z}(t)\right\} \tag{6}$$

となる．ここで，時刻 t における危険資産および無危険資産の保有量をそれぞれ $\alpha(t)$，$\beta(t)$ として，ポートフォリオ $\pi(t)$ を

$$\pi(t) = (\alpha(t), \beta(t))$$

とすると，$\pi = \pi(t)$ の下での富の過程 $W^\pi = \{W^\pi(t), 0 \le t \le T\}$ は

$$W^\pi(t) = \alpha(t)V(t) + \beta(t)B(t) \tag{7}$$

で与えられる．ここで

$$\int_0^T (\alpha(t)V(t))^2 dt < \infty$$

$$\int_0^T e^{-rt}\,|\beta(t)|\,dt < \infty$$

を仮定する．もしもポートフォリオ π に対して富の過程 $W^\pi(t)$ が

$$W^\pi(t) = \omega + \int_0^t \alpha(s)dV(s) + \int_0^t \beta(s)dB(s) \tag{8}$$

を満たすならば，$\pi = \pi(t)$ は自己充足的である．ただし，$W^{\pi}(0) = \omega$ である．自己充足的なポートフォリオ $\pi = \pi(t)$ に対して

$$e^{-rt}W^{\pi}(t) = \omega + \kappa \int_0^t e^{-rs}\alpha(s)V(s)d\tilde{Z}(s) \tag{9}$$

となり，$\tilde{W}^{\pi}(t) \equiv e^{-rt}W^{\pi}(t)$ は $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールとなる．

2.1　償還条項のない転換社債

投資家は任意の時刻で転換社債を株式に転換できる権利が与えられている．投資家は転換社債の価値を最大化するような戦略を行うので，時刻 t において (1) 式が転換社債の価値 $CB(t, V(t))$ より低いならば，転換しないことが最適戦略となる．よって最適戦略の下で投資家は

$$CB(t, V(t)) = C(t, V(t)) \tag{10}$$

を満たすとき転換するので，投資家への割り引き支払額を $R(t)$ とすると

$$R(t) = e^{-rt}C(t, V(t)) \tag{11}$$

となる．満期 T で投資家は，転換し $C(T, V(T))$ を受け取るか，額面価格 F を受け取るかを選択することができる．しかし満期 T での企業価値 $V(T)$ がそのどちらにも満たない場合は企業価値を受け取る．よって満期での投資家への割り引き支払額は $R(T)$ は

$$R(T) = e^{-rT}\min[V(T), \max[F, C(T, V(T))]] \tag{12}$$

となる．これらより，投資家が転換社債を転換する時刻を τ とおくと，時刻 0 での転換社債の価格 $CB(0, V(0))$ は

$$CB(0, V(0)) = \sup_{0\le\tau\le T} \tilde{E}[R(\tau)] \tag{13}$$

となる．

2.2　償還条項付き転換社債

投資家は任意の時刻で転換社債を株式に転換できる権利が与えられている．投資家は償還条項付き転換社債の価値を最大化するような戦略を行うので，(2) 式が償還条項付き転換社債の価値 $CB^*(t, V(t))$ より低いならば，転換しないことが最適戦略となる．よって最適戦略の下で投資家は償還条項がない転換社債のときと同様に

$$CB^*(t, V(t)) = C(t, V(t)) \tag{14}$$

を満たしたときに転換をする．また，企業は任意の時刻で転換社債を償還価格で償還する権利が与えられている．ただし企業が償還した際に投資家は，その時刻で転換社債を株式へ転換するか，償還価格 CP で企業に買い戻されるかを選ばなければならない．企業は転換社債の価値を最小するような戦略を行い，株式の価値を最大化する．よって最適戦略の下で企業は

$$CB^*(t, V(t)) = \max[C(t, V(t)), CP] \tag{15}$$

ならば転換社債を償還する．しかし，企業が償還しない場合でも $C(t, V(t)) \ge CP$ ならば投資家は転換する．これにより最適償還戦略は

$$CB^*(t, V(t)) = CP \tag{16}$$

となる．

これらから転換時刻を τ，償還時刻を σ とおくと，投資家への割り引き支払額は

$$\begin{aligned} R(\tau, \sigma) = {} & e^{-r\sigma}\max[C(\sigma, V(\sigma)), CP]1_{\{\sigma<\tau\}} \\ & + e^{-r\tau}C(\tau, V(\tau))1_{\{\tau\le\sigma\}} \end{aligned} \tag{17}$$

と表すことができる．ただし，$\tau, \sigma \in [t, T), t \in [0, T)$ である．また，満期 T では投資家のみが権利を行使することができるとし，企業価値が額面総額以下ならば，企業価値を受け取ることができるものとすると

$$R(T) = e^{-rT}\min[V(T), \max[C(T, V(T)), F]] \tag{18}$$

となる．そして時刻 0 での償還条項付き転換社債の価格 $CB^*(0)$ は

$$CB^*(0, V(0)) = \sup_{0\le\tau\le T} \inf_{0\le\sigma\le T} \tilde{E}[R(\sigma, \tau)] \tag{19}$$

となる．

2.3　株式に連続な配当がある場合

この節では企業が発行している株式に連続的な配当がある場合について考える．配当が無い場合は (2) 式で表されていた企業価値の変動は，配当がある場合を V^d とすると

$$dV^d(t) = (\mu - \delta)V^d(t)dt + \kappa V^d(t)dZ(t) \tag{20}$$

と表せる．前節と同様に μ はドリフト，κ はボラティリティ，δ は配当をあらわし、確率過程 $\{Z(t); t \le T\}$ は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で定義される標準ブラウン運動である．配当が無いときと同様にリスク中立測度 $\tilde{P}$ を (20) 式の下で (4) 式と定義することにより，Girsanov の定理によって，この確率測度は一意であり，$\frac{V(t)}{B(t)}$ は $\tilde{P}$ に関してマルチンゲールとなる．また $\tilde{Z}(t)$ を

$$\tilde{Z}(t) = Z(t) + \frac{\mu - r}{\kappa}dt$$

とおくことによって (20) 式は

$$dV^c(t) = (r - \delta)V^c(t)dt + \kappa V^c(t)d\tilde{Z}(t) \tag{21}$$

と書き換えられる．ただし $\tilde{Z}(t)$ は $\tilde{P}$ の下で標準ブラウン運動である．この式の解は

$$V^d(t) = V^d(0)\exp\left\{\left((r - \delta) - \frac{1}{2}\kappa^2\right)t + \kappa\tilde{Z}(t)\right\} \tag{22}$$

となる．

以降，企業価値の変動や割り引きについて少し変化するが，基本的に償還条項付き転換社債と転換社債の評価モデルは，ほぼ同様であるので割愛する．

3 LSM による数値解法

3.1 償還条項のない転換社債

完全市場を想定し，有限な離散時点 $n = 1, 2, \cdots, N$ において取引されていると仮定し，N は時間に対する分割数とする．サンプルパスの発生本数を M 本とすると，i 本目のパスの第 j 期での企業価値を $V_{i,j}$ は

$$V_{i,j} = V_{i,j-1} + rV_{i,j-1}\Delta t + \kappa\sqrt{\Delta t}V_{i,j-1}\Phi_{i,j-1} \tag{23}$$

と表すことができる．ただし，$\Phi_{i,j}$ は標準正規乱数とする．最初はこれらに対して満期時点 N でのペイオフを求める．(12) 式より

$$CB_{i,N} = \min[V_{i,N}, \max[F, C(N, V_{i,N})]] \tag{24}$$

となる．つまり場合分けをすると

$$\begin{cases} \frac{F}{z} \le V_{i,N} & \Rightarrow CB_{i,N} = zV_{i,N}, B_{i,N} = 1 \\ F \le V_{i,N} \le \frac{F}{z} & \Rightarrow CB_{i,N} = F, B_{i,N} = 1 \\ 0 \le V_{i,N} \le F & \Rightarrow CB_{i,N} = V_{i,N}, B_{i,N} = 1 \end{cases} \tag{25}$$

となり明確に戦略がわかる．このときの $B_{i,j}$ は i 番目のパスの時点 j での戦略である．1 は転換，0 は持ち越し，または満期では転換せずに額面価格 F を受け取るか企業価値を受け取るという意味を持つ．満期以外の時点 $j(0 \le j < N)$ でのペイオフは

$$CB_{i,j} = \min[C(j, V_{i,j}), e^{-r(s-j)\Delta t}E[CB_{i,s}|V_{i,j}]] \tag{26}$$

である．ただし $\Delta t = \frac{T}{N}$，$s(j < s \le N)$ とする．満期以外の時点も，満期のときと同様に最適転換戦略を後進的に決定する．満期以外での場合分けは

$$\begin{cases} C(j, V_{i,j}) \ge e^{-r(s-j)\Delta t}E[CB_{i,s}|V_{i,j}] & \Rightarrow \text{転換} \\ C(j, V_{i,j}) < e^{-r(s-j)\Delta t}E[CB_{i,s}|V_{i,j}] & \Rightarrow \text{持ち越す} \end{cases} \tag{27}$$

となる．転換社債では満期以外の時点での価格計算の全てで，持ち越し期待値が必要である．よって，すべてのパスに対して最小 2 乗法を用いて持ち越し期待値を計算する．ここで，

$$x_i = V_{i,j} \tag{28}$$

とおき．y_i は期間 $(j, N]$ において $B_{i,s} > 0$ となっている時点のペイオフを代入する．つまり，

$$y_i = e^{-r(s-j)\Delta t}CB_{i,s} \tag{29}$$

とする．最小 2 乗法を用いて持ち越し期待値 $\hat{y}_i$ を求める．そこで持ち越し期待値を $CB^c_{i,j} = \hat{y}_i$，時点 j で転換もしくは償還される価値を $CB^e_{i,j}$ とおくと

$$\begin{cases} CB^e_{i,j} \ge CB^c_{i,j} & \begin{cases} CB^e_{i,j} = C(j, V_{i,j}) \\ B_{i,j} = 1, B_{i,s} = 0 \end{cases} \\ CB^e_{i,j} < CB^c_{i,j} & \begin{cases} CB^c_{i,j} = 0 \\ B_{i,j} = 0, B_{i,s} = 1 \end{cases} \end{cases} \tag{30}$$

のように上書きをする．この作業を後進的に時点 0 まで行い，すべてのパスに対してのペイオフの平均である

$$CB(0, V(0)) \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(e^{-rs\Delta t}CB_{i,s}\right) \tag{31}$$

が時刻 0 での転換社債の価格となる．

3.2 償還条項付き転換社債

パスの発生は，転換社債のときと同様に (23) 式であるとする．償還条項付き転換社債では，最適転換戦略と最適償還戦略があるので，1 を転換，2 を償還，0 を持ち越しという意味を持たせる．最初はこれらに対して満期 T でのペイオフを求める．満期 T では，投資家のみ権利行使ができるので転換社債のときと同様に (24) 式で表され，場合分けも (25) 式と同様である．満期以外の時刻でのペイオフは

$$\begin{aligned} CB^*_{i,j} = \max[&C(j, V_{i,j}), \\ &\min[CP, e^{-r(s-j)\Delta t}E[CB_{i,s}|V_{i,j}]]] \end{aligned} \tag{32}$$

である．満期のときと同様に最適転換戦略と最適償還戦略を決める．その場合分けは

$$\begin{cases} C(j, V_{i,j}) \ge e^{-r(s-j)\Delta t}E[CB^*_{i,s}|V_{i,j}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \text{転換する} \\ CP \le e^{-r(s-j)\Delta t}E[CB^*_{i,s}|V_{i,j}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \text{償還する} \\ C(j, V_{i,j}) < e^{-r(s-j)\Delta t}E[CB^*_{i,s}|V_{i,j}] < CP \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \Rightarrow \text{持ち越す} \end{cases} \tag{33}$$

となる．ここで，一つめのケースと二つめのケースを同時に満たすときは，一つめケースが優先される．上記以外は転換も償還もしないことが最適戦略となる．つまり $B_{i,j} = 0$ となる．償還条項付き転換社債では転換社債のときと同様，満期以外の時点での価格計算に持ち越し期待値が必要となっている．よってすべてのパスに対して最小 2 乗法を用いて持ち越し期待値を計算する．この方法は転換社債のときと同様であるので割愛する．持ち越し期待値を $CB^{*c}_{i,j} = \hat{y}_i$ を求め，時刻 j で転換もしくは償還される価値を $CB^{*e}_{i,j}$ とおくと

$$\begin{cases} CP \le CB^{*c}_{i,j} \Rightarrow CB^*_{i,j} = CP, B_{i,j} = 2, B_{i,s} = 0 \\ C(j, V_{i,j}) \ge CB^{*c}_{i,j} \\ \qquad \Rightarrow CB^*_{i,j} = zV(i,j), B_{i,j} = 1, B_{i,s} = 0 \\ CP < CB^{*c}_{i,j} < C(j, V_{i,j}) \Rightarrow CB^*_{i,j} = 0 \end{cases} \tag{34}$$

となる．この作業を後進的に時点 0 まで行う．そしてすべてのパスに対してのペイオフの平均である

$$CB^*(0, V(0)) \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\left(s^{-rs\Delta t}CB^*_{i,s}\right) \tag{35}$$

が償還条項付き転換社債の価格となる．

表 1　パラメータ

企業価値の初期値	$V(0)$	100
額面価格	F	100
償還価格	CP	100
満期	T	2
ボラティリティ	κ	0.3
無リスク利子率	r	0.1
希薄化因子	z	0.5
時間分割数	N	100
配当	δ	0.05

表 2　商品の比較

商品名	*2* 項モデル	*LSM*	乖離率 *(%)*
CB(not dividend)	75.644839	75.622507	0.029521
CB	79.841211	79.115144	0.016107
CB^* *(not dividend)*	74.869949	74.871856	0.002548
CB^*	79.127890	79.083945	0.055536

4　考察

表 2 において，それぞれの商品の LSM を用いて導出した価格，2 項モデルの価格，その乖離率を示した．また，使用したパラメータは表 1 に記す．LSM での数値解 (分割数 100，パスの発生本数 30000 本) は 2 項モデル (分割数 5000) のものとほとんど変わらないことがわかる．転換社債の性質として，企業に償還条項を付与した償還条項付き転換社債とした場合，価値はより低く評価され株式に配当を付けることによって高く評価されることがわかった．

2 項モデルとの乖離の様子は図 1, 図 2, 図 3, 図 4 で示した．これらの図を見るとわかるようにその収束は早く，速い段階で乖離率が 1% 以内に収まっているのがわかる．その後も全ての商品において乖離率は 0.3〜0.4% 以内に落ち着いている．

今後の課題として，金融市場には様々な条件によって分類されているデリバティブが数多くある．その中でも本論文で取り扱った内容と近い，転換価格修正条項付き転換社債 (MSCB) を LSM を用いて価格付けをすることが挙げられる．

参考文献

[1] M.J.Brennan and E.S.Schwartz, Convertible bonds: valuation and optimal strategies for call and conversion, *J.Finance* 32(1977)1699-1715.

[2] Longstaff, F. A. and E. S. Schwartz, Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach, *Review of Financial Studies* 14(2001)113-148.

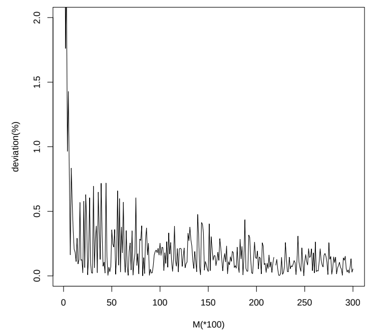

図 1　配当のない転換社債の乖離率

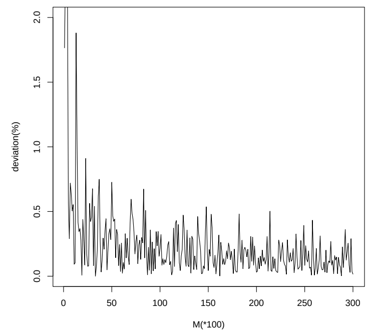

図 2　配当のある転換社債の乖離率

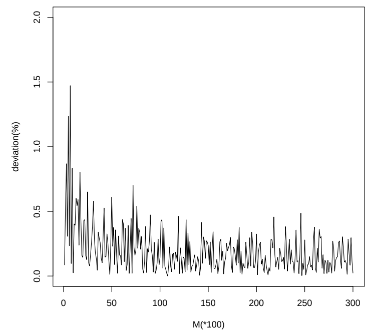

図 3　配当のない償還条項付き転換社債の乖離率

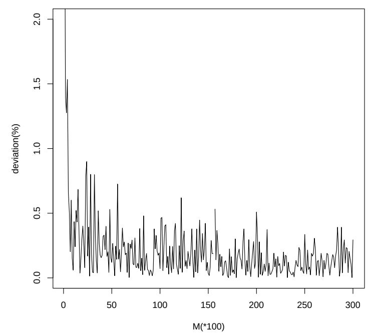

図 4　配当のある償還条項付き転換社債の乖離率