パワー・リバース・デュアル・カレンシー債の評価とその数値計算

M2004MM009 堀田 雅文

指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

仕組債はオプションや先物などのデリバティブが組み込まれた複合的な債券である．デリバティブを債券のキャッシュフローに組み込むことによって, 満期期間やクーポン, 償還金等を比較的自由に設定できるなど, 投資家の個別のニーズに合わせたキャッシュフローの実現を目指すことができる．つまり, オーダーメイド発行が可能となる．投資家固有のポートフォリオのバランスや, 将来のクーポン収入に合わせて, あるいは, ポートフォリオのヘッジやアセット・アロケーション・マネジメントの観点から, 仕組債が用いられる．近年, 仕組債への投資は, 法人はもとより個人の投資家にまで広がりを持つようになってきている．一般の債券では金利リスクと発行体の信用リスクを負うが, 仕組債の場合にはその他のリスク（為替や株価の変動）も負うことになる．代表的な仕組債としては, デュアル債や日経平均株価連動債, 他社株転換債（EB）などがある．本研究ではこのデュアル債の１つであるパワー・リバース・デュアル・カレンシー債 (PRDC) についての評価を行なう．

2　パワー・リバース・デュアル・カレンシー債

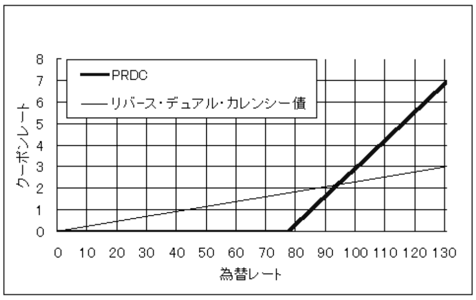

図１　クーポンレート例

元本の払い込み, 利払い, 償還などが単一の通貨で行われるのではなく, 異なる通貨で行われる債券のことを二重通貨債あるいはデュアル・カレンシー債という．リバース・デュアル・カレンシー債はこの二重通貨債の１つで, 払い込みと償還を円建てで行い, 利払いを外貨建てで行うタイプのものである．つまり, 元本の通貨と利払いの通貨が異なり, 利払いの部分だけ為替リスクを負うものである．外貨での受け取り利息を支払い時点の為替レートで円転するものとみなせば, リバース・デュアル・カレンシー債は為替レートに連動した変動利付債である．リバース・デュアル・カレンシー債は, 元本は円建てであるので薄価で保有でき, また, 為替相場によっては固定利付債を購入するよりも大きな運用収益が得られるという魅力がある．しかし, しばしば投資家にはもっと高い利回りの運用商品ニーズがある．リバース・デュアル・カレンシー債の特徴を維持しながら, より高いクーポンレートをとり, 為替反応度を高めたものがパワー・リバース・デュアル・カレンシー債 (以下では PRDC と表記) である．PRDC のクーポンレートは例えば $\max\left[13\% \cdot \frac{S_T}{100} - 10\%, 0\right]$ として算定できる．ただし S_T は満期時点での為替レートである．リバース・デュアル・カレンシー債のクーポンレート例と PRDC のクーポンレート例を比較したものが**図 1** である．この図の例では, 為替レートが１ドル 93．５円よりも円安の場合はリバース・デュアル・カレンシー債よりも高い利回りを得ることができ, 逆に 93．５円よりも円高の場合はリバース・デュアル・カレンシー債よりも低い利回りとなる．また, 為替レートが 1 ドル 76．9 円よりも円高の場合はクーポン支払いが発生しない．これより, PRDC は為替リスク (円高リスク) を高める代償として, 円安メリットを拡大したものに他ならないことが分かる．

3　クーポン支払いが満期において１回限りの PRDC

この節ではクーポン支払いが満期において 1 回ある PRDC の価格評価を行なう．

3.1　記号の定義

各記号の定義を以下で与える．

S_t：時刻 t での為替レート (単位：円/ドル)

r_d：国内のリスクフリーレート

r_f：対象となる外国のリスクフリーレート

σ：ボラティリティ

F：PRDC の額面価格

g：初期に設定する為替レート (単位：円/ドル)

α：クーポンレートの決定定数 (為替部分の係数) < 1

β：クーポンレートの決定定数 (クーポン発生因数) $< \alpha < 1$

T：満期

$V(S_t, t)$：PRDC の価値

3.2　評価モデルの定式化

以下の仮定の下での PRDC の価格評価を行なう．

仮定 1　残存期間中に繰り上げ償還がないものとする

仮定 2　満期での償還金は為替の変動による影響を受けない円価によるもので, 元本 F を保証する

仮定 3　クーポン支払いは満期においての１回のみとする

仮定 4　為替レートに連動した円価でクーポン
$(\max\left[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F)$ を受け取る

また, 為替レートのプロセス $\{S_t : t \geq 0\}$ が

$$\frac{dS_t}{S_t}=(r_d-r_f)dt+\sigma dW_t \tag{1}$$

で与えられるものとする [5].

以上の仮定より, この債券の満期 T でのペイオフは以下で与えられる.

$$\max\left[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F+F$$

したがって, 期首から期末までの途中のペイオフはないので, 期首 0 でのこの債券の価格は上記のペイオフをリスク中立測度において期待値をとり, 国内のリスクフリーレートで割り引いたものである. したがって,

$$V(S_0,0)=e^{-r_dT}E_p\left[\max\left[\alpha\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F+F\right]$$

である. ただし, E_p はリスク中立確率 p の下での期待値.

3.3　評価式

評価式は以下のように表現できる. 導出方法は [2], [3] を参照.

$$V(S_0,0)=\frac{\alpha}{g}S_0Fe^{-r_fT}\Phi(h_1)-\beta e^{-r_dT}F\Phi(h_2)+e^{-r_dT}F \tag{2}$$

$$h_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{\alpha S_0}{\beta g}\right)+\left(r_d-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right) \tag{3}$$

$$h_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\left(\frac{\alpha S_0}{\beta g}\right)+\left(r_d-r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right) \tag{4}$$

4　クーポン支払いが満期においての 1 回限りのトリガー付 PRDC(ルックバックタイプ)

この節ではクーポン支払いが満期において 1 回あるトリガー付 PRDC の価格評価を行なう. PRDC の残存期間中において, 為替レートがトリガーを越えるとクーポン支払いが行なわれないモデルを考える. この節では記号 g を, トリガーとなる初期に設定する為替レート (単位：円/ドル) と再定義し, $g > S_0$ の制約を課す.

4.1　評価モデルの定式化

以下の仮定の下での PRDC の価格評価を行なう.

仮定 1　残存期間中に繰り上げ償還がないものとする

仮定 2　償還金は為替の変動による影響を受けない円価によるもので, 元本 F を保証する

仮定 3　クーポン支払は満期においての 1 回のみとする

仮定 4　残存期間中に為替レートがある一定の水準よりも円安になった場合, クーポンは支払われない

仮定 5　為替レートの最大値が g 以下ならば,
円価でクーポン $(\max[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0]\cdot F)$ を受け取る

また, 為替レートのプロセスは (1) 式に従うものとする.

以上の仮定より, この債券の満期 T でのペイオフは以下で与えられる.

$$\max\left[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F1_{(\hat{S}_T\leq g)}+F$$

ただし, $\hat{S}_T=\max_{0\leq t\leq T}S_t$ である.
したがって, 期首から期末までの途中のペイオフはないので, 期首 0 でのこの債券の価格は上記のペイオフをリスク中立測度において期待値をとり, 国内利子率で割り引いたものである. よって,

$$V(S_0,0)=e^{-r_dT}E_p\left[\max\left[\alpha\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]F1_{(\hat{S}_T\leq g)}+F\right]$$

である. ただし, E_p はリスク中立測度の下での期待値.

4.2　評価式

評価式は以下のように表現できる. 導出には同時分布を用いた [1], [2], [4].

$$\begin{aligned}V(S_0,0)&=e^{-r_dT}F+e^{-r_fT}\frac{\alpha}{g}S_0F\left(\Phi(d_1)-\Phi(d_3)\right)\\&\quad-e^{-r_fT}\frac{\alpha}{g}S_0F\left(\frac{g}{S_0}\right)^{\frac{2(r_d-r_f)}{\sigma^2}+1}\left(\Phi(d_2)-\Phi(d_4)\right)\\&\quad-e^{-r_dT}\beta F\left(\Phi(d_5)-\Phi(d_7)\right)\\&\quad-e^{-r_dT}\beta F\left(\frac{g}{S_0}\right)^{\frac{2(r_d-r_f)}{\sigma^2}-1}\left(\Phi(d_6)-\Phi(d_8)\right)\end{aligned} \tag{5}$$

$$d_1=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{g}{S_0}-\left(r_d-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{6}$$

$$d_2=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{g}-\left(r_d-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{7}$$

$$d_3=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{\beta g}{\alpha S_0}-\left(r_d-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{8}$$

$$d_4=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{\beta S_0}{\alpha g}-\left(r_d-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{9}$$

$$d_5=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{g}{S_0}-\left(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{10}$$

$$d_6=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{S_0}{g}-\left(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{11}$$

$$d_7=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{\beta g}{\alpha S_0}-\left(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{12}$$

$$d_8=\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\log\frac{\beta S_0}{\alpha g}-\left(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right) \tag{13}$$

5　クーポン支払いが満期においての 1 回限りのトリガー付 PRDC(参照日判定タイプ)

この節ではクーポン支払いが満期において 1 回あるトリガー付 PRDC の価格評価を行なう. 為替参照日において, 為替レートがトリガーを越えるとクーポン支払いが行なわれないモデルを考える. この節では記号 g を, トリガーとなる初期に設定する為替レート (単位：円/ドル) と再定義する.

5.1　評価モデルの定式化

以下の仮定の下での PRDC の価格評価を行なう.

仮定 1　残存期間中に繰り上げ償還がないものとする

仮定 2　償還金は為替の変動による影響を受けない円価によるもので, 元本 F を保証する

仮定 3　クーポン支払は満期においての 1 回のみとする

仮定 4　為替参照日において為替レートがある一定の水準よりも円安になった場合, クーポンは支払われない

仮定 5　為替参照日とクーポン支払い日は同じ日とする

仮定 6　為替参照日において為替レートが g 以下ならば, 円価でクーポン ($\max[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0]\cdot F$) を受け取る

また, 為替レートのプロセスは (1) 式に従うものとする.

以上の仮定より, この債券の満期 T でのペイオフは以下で与えられる.

$$\max\left[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F1_{(S_T\leq g)}+F$$

したがって, 期首から期末までの途中のペイオフはないので, 期首 0 でのこの債券の価格は上記のペイオフをリスク中立測度において期待値をとり, 国内利子率で割り引いたものである. よって,

$$V_0=e^{-r_dT}E_p\left[\max\left[\alpha\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]F1_{(S_T\leq g)}+F\right]$$

である. ただし, E_p はリスク中立測度の下での期待値.

5.2　評価式

評価式は以下のように表現できる.

$$\begin{aligned}V(S_0,0)&=e^{-r_fT}\frac{\alpha}{g}FS_0\left(\Phi(d_1)-\Phi(d_3)\right)\\&\quad-e^{-r_dT}\beta F\left(\Phi(d_5)-\Phi(d_7)\right)+e^{-r_dT}F\end{aligned}\tag{14}$$

6　クーポン支払いが複数回 (2 回) ある PRDC

この節では, クーポンを残存期間中のクーポン支払い日に 1 回, そして満期においてクーポンと元本を受け取る PRDC の価格評価を行なう. また, 記号 t_c をクーポン支払い日と定義し, $t_c<T$ の制約を課す.

6.1　評価モデルの定式化

以下の仮定の下での PRDC の価格評価を行なう.

仮定 1　残存期間中に繰り上げ償還がないものとする

仮定 2　満期での償還金は為替の変動による影響を受けない円価によるもので, 元本 F を保証する

仮定 3　クーポン支払いは残存期間中の利払い日に 1 回と満期においてと合計 2 回あるものとする

仮定 4　クーポン支払い日に為替レートに連動した円価でクーポン ($\max\left[\alpha\cdot\frac{S_{t_c}}{g}-\beta,0\right]\cdot F$) を受け取る

仮定 5　満期に為替レートに連動した円価でクーポン ($\max\left[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F$) を受け取る

また, 為替レートのプロセスは (1) 式に従うものとする.

PRDC は, 元資産が株価であるタイプのオプションとは異なり, クーポン支払いによる元資産 (為替レート) の値に対する影響は無い. したがって以上の仮定より, 期首 0 でのこの債券の価格は各時点でのキャッシュフローをリスク中立測度において期待値をとり, 国内のリスクフリーレートで割り引いた現在価値を足しあわせたものとして計算できる. したがって,

$$\begin{aligned}V(S_0,0)&=e^{-r_dt_c}E_p\left[\max\left[\alpha\frac{S_{t_c}}{g}-\beta,0\right]\cdot F\right]\\&\quad+e^{-r_dT}E_p\left[\max\left[\alpha\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F+F\right]\end{aligned}$$

である. ただし, E_p はリスク中立確率 p の下での期待値.

6.2　評価式

評価式は以下のように表現できる.

$$\begin{aligned}V\ (S_0,0)&=\frac{\alpha}{g}S_0F\left(e^{-r_ft_c}\Phi(h_3)+e^{-r_fT}\Phi(h_1)\right)\\&\quad-\beta\left(e^{-r_dt_c}F\Phi(h_4)+e^{-r_dT}F\Phi(h_2)\right)+e^{-r_dT}F\end{aligned}\tag{15}$$

$$h_3=\frac{1}{\sigma\sqrt{t_c}}\left(\log\left(\frac{\alpha S_0}{\beta g}\right)+\left(r_d-r_f+\frac{1}{2}\sigma^2\right)t_c\right)\tag{16}$$

$$h_4=\frac{1}{\sigma\sqrt{t_c}}\left(\log\left(\frac{\alpha S_0}{\beta g}\right)+\left(r_d-r_f-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t_c\right)\tag{17}$$

7　クーポン支払いが複数回 (2 回) あるトリガー付 PRDC(参照日判定タイプ)

この節では, クーポンを残存期間中のクーポン支払い日に 1 回, そして満期においてクーポンと元本を受け取るトリガー付 PRDC の価格評価を行なう. 為替参照日において, 為替レートがトリガーを越えるとクーポン支払いが行なわれないモデルを考える. この節では記号 g を, トリガーとなる初期に設定する為替レート (単位 : 円/ドル) と再定義する.

7.1　評価モデルの定式化

以下の仮定の下での PRDC の価格評価を行なう.

仮定 1　残存期間中に繰り上げ償還がないものとする

仮定 2　満期での償還金は為替の変動による影響を受けない円価によるもので, 元本 F を保証する

仮定 3　クーポン支払いは残存期間中の利払い日に 1 回と満期においてと合計 2 回あるものとする

仮定 4　為替参照日において為替レートがある一定の水準よりも円安になった場合, クーポンは支払われない

仮定 5　為替参照日とクーポン支払い日は同じ日とする

仮定 6　為替参照日において為替レートが g 以下ならば, 円価でクーポン ($\max\left[\alpha\cdot\frac{S_{t_c}}{g}-\beta,0\right]\cdot F$) を受け取る

仮定 7　満期において為替レートが g 以下ならば, 円価でクーポン ($\max\left[\alpha\cdot\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F$) を受け取る

また, 為替レートのプロセスは (1) 式に従うものとする.

以上の仮定より, 期首 0 でのこの債券の価格は各時点でのキャッシュフローをリスク中立測度において期待値をとり, 国内のリスクフリーレートで割り引いた現在価値を足しあわせたものとして計算できる．したがって,

$$V(S_0,0)=e^{-r_d t_c}E_p\left[\max\left[\alpha\frac{S_{t_c}}{g}-\beta,0\right]\cdot F1_{(S_{t_c}\le g)}\right]$$
$$+\,e^{-r_d T}E_p\left[\max\left[\alpha\frac{S_T}{g}-\beta,0\right]\cdot F1_{(S_T\le g)}+F\right]$$

である. ただし, E_p はリスク中立測度の下での期待値.

7.2 評価式

評価式は以下のように表現できる.

$$\begin{aligned}
&V\ (S_0,0)\\
&=\frac{\alpha}{g}FS_0e^{-r_fT}\left(\Phi(d_1)-\Phi(d_3)\right)\\
&+\frac{\alpha}{g}FS_0e^{-r_ft_c}\left(\Phi(\bar{d_1})-\Phi(\bar{d_3})\right)\\
&-\beta Fe^{-r_dT}\left(\Phi(d_5)-\Phi(d_7)\right)\\
&-\beta Fe^{-r_dt_c}\left(\Phi(\bar{d_5})-\Phi(\bar{d_7})\right)+e^{-r_dT}F
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\bar{d_1}=\frac{1}{\sigma\sqrt{t_c}}\left(\log\frac{g}{S_0}-\left(r_d-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)t_c\right) \tag{19}$$

$$\bar{d_3}=\frac{1}{\sigma\sqrt{t_c}}\left(\log\frac{\beta g}{\alpha S_0}-\left(r_d-r_f+\frac{\sigma^2}{2}\right)t_c\right) \tag{20}$$

$$\bar{d_5}=\frac{1}{\sigma\sqrt{t_c}}\left(\log\frac{g}{S_0}-\left(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)t_c\right) \tag{21}$$

$$\bar{d_7}=\frac{1}{\sigma\sqrt{t_c}}\left(\log\frac{\beta g}{\alpha S_0}-\left(r_d-r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)t_c\right) \tag{22}$$

8 おわりに

本研究では, 様々なタイプの PRDC の価格の評価を行なった．これらそれぞれに同じパラメータを用いて比較したのが**図 2**, **図 3** である．ただし, **図 2** の汎例の REF-PRDC は参照日判定タイプのトリガー付 PRDC を表わし, LB-PRDC はルックバックタイプのトリガー付 PRDC を表わすものとする．また, **図 3** の汎例の 2-PRDC はクーポン支払いが 2 回ある PRDC を表わし, 2-REF-PRDC はクーポン支払いが 2 回ある参照日判定タイプのトリガー付 PRDC を表わすものとする．なお、価値 V を縦軸, 現時点でのレート S_0 を横軸にとった.

これらの数値例より, PRDC よりも参照日判定タイプのトリガー付 PRDC の方が価値 V は低く, 参照日判定タイプのトリガー付 PRDC よりもルックバックタイプのトリガー付 PRDC の方が価値 V が低くなっている．これは, PRDC に比べ, 参照日判定タイプのトリガー付 PRDC の方が, トリガーの存在によりクーポン支払いの有無に関わる条件が円安部分において厳しくなっていることと, 参照日判定タイプのトリガー付 PRDC に比べ, ルックバックタイプのトリガー付 PRDC の方がトリガーの有効範囲が広いため, クーポン支払いの有無に関わる条件が円安部分においてより厳しくなっていることから説明できる．次

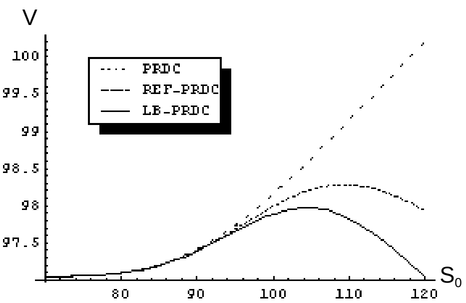

図 2　現時点での為替レート変化による PRDC とトリガー付 PRDC の価値の変化度合の比較

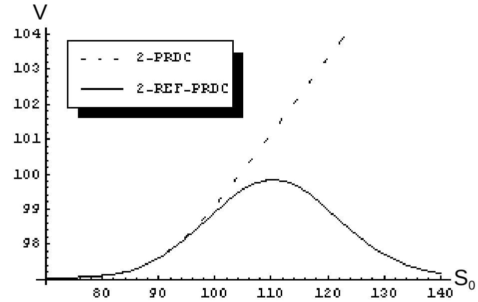

図 3　現時点での為替レート変化によるクーポン 2 回の PRDC とトリガー付 PRDC の価値の変化度合の比較

に, クーポン支払いが 1 回のものと 2 回あるものを比べると, 2 回あるものの方が価値は当然高くなっている．また, 評価式の性質もほぼ同じものが得られた．そして, それぞれの PRDC においての価値の下限は, クーポン部分を除いた, 元本部分を国内利子率で割り引いたもので共通となっている．以上のことから, それぞれの PRDC において妥当な評価式を求めることができたと思われる．今後の課題としては, 早期償還型のトリガー付 PRDC や, トリガーが時間に依存して変動するトリガー付 PRDC の評価が挙げられる.

参考文献

[1] Conze. A, Viswanathan. S , “Path Dependent Options : The Case of Lookback Options”, *Journal of Finance*,46.5,1893-1907,1991

[2] Cox. D. R. and Miller. H. D. , *The Theory of Stochastic Processes*, Chap-man &Hall, London(1965).

[3] Cox, J. C. and Rubinstein, M. , “Option Pricing : A Simplified Approach”, *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263, 1979

[4] ドージェ・ブローディ, 現代ファイナンス数理, 日本評論社 (2000).

[5] 森平爽一朗, 小島裕, コンピュテーショナル・ファイナンス, 朝倉書店 (1997).