

# ジャンプ拡散過程を用いたオプションプライシング

M2004MM016 伊藤 彰浩

指導教員 國田 寛

## 1 はじめに

金融派生商品の代表的商品の1つであるである、オプションの理論価格を導出する数学的モデル(オプション価格付けモデル)は、1970年代初頭に Black and Scholes によって、また Merton によって、おのおの独立に開発されたモデル(Black-Scholes モデルまたは Black, Scholes and Merton モデル)を基本としている。原資産価格の動きが拡散過程に従うなどの仮定を置いた BS モデルでは、オプションの理論価格が比較的容易な数式で表され、オプション市場の急速な発展の中心的役割を果たしてきた。しかし、まれに起こる現象が価格に急激な変化をもたらす可能性があり、このモデルだけでは不十分であり、道が不連続であるような確率過程を導入する必要がある。そこで、Merton[4]は、ジャンプ拡散モデルを導入した。このモデルは多くの場合、BS モデルとは異なって、オプションを完璧にヘッジできない非完備な市場モデルであるという特徴を持っている。

本研究では、まず基本的なジャンプ拡散モデルを述べ、次に Merton モデルの特徴を考察する。さらに、経路依存型オプション(バリアオプション、ルックバックオプション等)や永久アメリカンオプションに対して、Merton モデルより、取り扱い易い Kou モデル[2]を考察する。

## 2 ジャンプ拡散モデル

ジャンプ拡散モデルは、複合 Poisson 過程によるオプション価格付けモデルであり、Merton[4]によって導入された。資産価格のダイナミクスは、

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t + d \left( \sum_{i=1}^{N_t} (V_i - 1) \right), \quad (1)$$

与えられ、 $\mu$  は期待収益率(定数)、 $\sigma$  は収益率のボラティリティ(定数)、 $W_t$  は標準 Brown 運動、 $N_t$  はパラメータ  $\lambda$  の Poisson 過程、 $V_i$  はジャンプが起きた際のジャンプ幅率を表す確率変数である。

## 3 Merton(対数正規分布ジャンプ幅率)モデル

Merton[4]では、原資産価格  $S_t$  の変動過程を(1)と仮定して、パラメータ  $V$  が対数正規分布にしたがう場合( $\ln V \sim \Phi(\mu_Y, \sigma_Y^2)$ )に解析解が求められるとしている。行使価格を  $K$ 、満期を  $T$  とするコール・オプションの価格  $C$  は、次で与えられる

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T} (\lambda T)^n}{n!} [S_0 \Phi(d_1(n)) - K e^{-r_n T} \Phi(d_2(n))]. \quad (2)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda(1+k), \quad k = \mathbf{E}[Y-1] = e^{\mu_Y} - 1, \\ r_n &= r - \lambda k + n \ln(1+k)/T, \quad \sigma_n^2 = \sigma^2 + n\sigma_Y^2/T, \\ d_1(n) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} [\ln(S_0/K) + (r_n + \sigma^2/2)T], \\ d_2(n) &= d_1 - \sigma\sqrt{T}. \end{aligned}$$

## 3.1 数値結果

Merton モデルの価格式(2)の係数部分を

$$\frac{e^{-\lambda' T} (\lambda' T)^n}{n!} = \exp \left( -\lambda' T + n \ln(\lambda' T) - \sum_{i=1}^n \ln i \right)$$

で評価する。

### 3.1.1 初期資産価格の変化による価格の変動

パラメータ

$$\begin{aligned} T &= 1.0, \quad K = 100, \quad r = 0.05, \quad \sigma = 0.3 \\ \mu_Y &= 0.0, \quad \sigma_Y = 1.0, \quad S_0 = 80, 90, 100, 110, 120 \end{aligned}$$

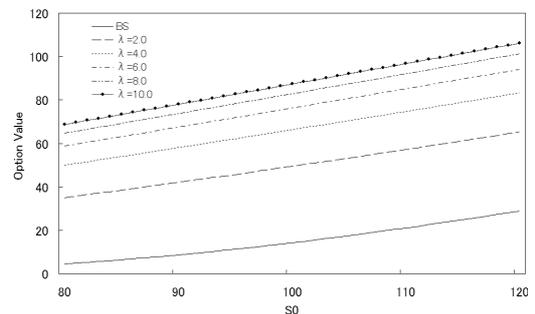


図1 初期資産価格を変化させた場合

図1より、BSモデルにおけるヨーロピアン・オプションと同様に、 $S_0$ が増加するにつれて、価格は増大する。さらに、それぞれのグラフの傾きは等しいが、 $\lambda$ が増加するにしたがって、各  $S_0$  における差は小さくなっている。これは、価格式(2)において、 $S_0$ は分布関数  $\Phi(d_1(n))$  に依存しており、 $n$ の階乗の計算が速く大きくなるため、分子の  $\lambda$  による増加分が相殺されるためである。

## 4 Kou(2重指数分布ジャンプ幅率)モデル

ここでは、Kou[2]によって導入されたモデルを扱う。

### 4.1 2重指数分布の特徴

#### (1) 尖度(leptokurtic)の特徴

ジャンプ幅の分布の尖度の特徴が、リターンの分布に引き継がれる。

(2) 2重指数分布の無記憶性

経路依存型オプション (バリア・オプション, ルックバック・オプション, 永久アメリカン・オプション etc) の closed-form な解を導ける .

4.2 Kou モデル

Merton モデルと同様に, 資産価格のダイナミックスは, (1) で与えられる . Kou モデルにおける  $\{V_i\}$  は,  $Y = \ln(V)$  が密度関数

$$f_Y(y) = p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q \cdot \eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}},$$

$\eta_1 > 1, \eta_2 > 0, p, q \geq 0, p + q = 1$  をもつ非対称 2重指数分布をもつ独立同一分布非負確率変数列とする . ここで  $p, q$  は, それぞれ up ジャンプと down ジャンプを表す .  $\eta_1 > 1$  は  $S_t$  が有限の期待値であることを保証している . 2つの指数分布の平均はそれぞれ  $1/\eta_1, 1/\eta_2$  である . このモデルにおける不確実性は,  $N_t, W_t, Y_s$  であり, 独立であると仮定する .

ジャンプがあるために, リスク中立確率測度はただ 1つではない . HARA 型の効用関数を持つ理論的期待値理論を用いて, オプションの均衡価格が, 割引価値のリスク中立測度のもとでの期待値によって与えられるように, 特定のリスク中立測度  $\mathbf{P}^*$  を選ぶことができることが示されている . リスク中立測度  $\mathbf{P}^*$  のもとで, 資産価格  $S_t$  は,

$$X_t = \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda^* \zeta^* \right) t + \sigma W_t^* + \sum_{i=1}^{N_t^*} Y_i^*,$$

$$X(0) = 0,$$

によって与えられるリターン過程  $X_t = \log(S_t/S_0)$  をもつ 2重指数ジャンプ拡散過程

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda^* \zeta^*) dt + \sigma dW_t^* + d \left( \sum_{i=1}^{N_t^*} (V_i^* - 1) \right),$$

に従う . ここで,  $W_t^*$  は  $\mathbf{P}^*$  のもとで標準 Brown 運動,  $\{N_t^*; t \geq 0\}$  は強度  $\lambda^*$  をもつ Poisson 過程,  $V^* = e^{Y^*}$  である . 対数ジャンプ幅  $\{Y_1^*, Y_2^*, \dots\}$  は, 新しい 2重指数密度  $f_{Y^*}(y) \sim p^* \eta_1^* e^{-\eta_1^* y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q^* \eta_2^* e^{\eta_2^* y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}$  をもつ独立同一分布確率変数列を形成している . 定数  $p^*, q^* \geq 0, p^* + q^* = 1, \lambda^* > 0, \eta_1^* > 1, \eta_2^* > 0$ ,

$$\zeta^* := \mathbf{E}^*[V^*] - 1 = \frac{p^* \eta_1^*}{\eta_1^* - 1} + \frac{q^* \eta_2^*}{\eta_2^* + 1} - 1$$

である . 不確実性  $N_t^*, W_t^*, Y_s^*$  は, なおも  $\mathbf{P}^*$  と独立である .

以降は表記を簡単にするために, \*を除いて表現する .

4.3 表記

$X(t)$  の積率母関数は,

$$G(x) := x \left( r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda \zeta \right) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2$$

$$+ \lambda \left( \frac{p \eta_1}{\eta_1 - x} + \frac{q \eta_2}{\eta_2 + x} - 1 \right),$$

とおくと,  $\mathbf{E}^*[e^{\theta X(t)}] = \exp\{G(\theta)t\}$  で与えられる .  $x$  を実数と限定すると,  $G(x) = \alpha, \forall \alpha > 0$  は,

$$0 < \beta_{1,\alpha} < \eta_1 < \beta_{2,\alpha} < \infty,$$

$$0 < \beta_{3,\alpha} < \eta_2 < \beta_{4,\alpha} < \infty, \quad (3)$$

である, 4つの根,  $\beta_{1,\alpha}, \beta_{2,\alpha}, -\beta_{3,\alpha}, -\beta_{4,\alpha}$  を厳密に持つことが [3] の補題 2.1 で示されている .  $X(t)$  の無限小生成作用素は,

$$(\mathcal{L}V)(x) := \frac{1}{2} \sigma^2 V''(x) + \left( r - \frac{1}{2} \sigma^2 - \lambda \zeta \right) V'(x)$$

$$+ \lambda \int_{-\infty}^{\infty} [V(x+y) - V(x)] f_Y(y) dy, \quad (4)$$

と定義される .

4.4 ヨーロピアン・オプションの価格付け

ここでは, ヨーロピアン・コール, ヨーロピアン・プットオプションの価格付けを行う . そのために, 2重指数確率変数と正規確率変数の和の分布を知る必要があり, 数理解物理学の特別な関数である, Hh 関数を導入し行う .

4.4.1 Hh 関数

すべての  $n \geq 0$  に対して, Hh 関数は,

$$\text{Hh}_n(x) = \int_x^{\infty} \text{Hh}_{n-1} dy$$

$$= \frac{1}{n!} \int_x^{\infty} (t-x)^n e^{-t^2/2} dt \geq 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\text{Hh}_{-1}(x) = e^{-x^2/2} = \sqrt{2\pi} \varphi(x), \quad \text{Hh}_0(x) = \sqrt{2\pi} \Phi(-x);$$

で定義される非増加関数である .

4.4.2 ヨーロピアン・コール, ヨーロピアン・プット・オプション

任意の確率  $\mathbf{P}$  に対して,

$$\Upsilon(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) := \mathbf{P}[Z(T) \geq a],$$

を定義する . ここで,  $Z(t) = \mu t + \sigma W(t) + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ ,  $Y$  は密度関数  $f_Y(y) \sim p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \geq 0\}} + q \cdot \eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{\{y < 0\}}$  をもつ 2重指数分布に従い,  $N(t)$  は  $\lambda$  をもつ Poisson 過程である . コール・オプションの価格付け公式は,  $\Upsilon$  で表すことができる . そして, 順々に Hh 関数の和として導くことができる .

定理 4.1. ヨーロピアン・コール・オプションの価格は,

$$\psi_0^C = S_0 \Upsilon \left( r + \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \zeta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \ln \frac{K}{S_0}, T \right)$$

$$- K e^{-rT} \Upsilon \left( r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \zeta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \ln \frac{K}{S_0}, T \right)$$

で与えられる . ここで,

$$\tilde{p} = \frac{p}{1 + \zeta} \cdot \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1}, \quad \tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1, \quad \tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1,$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda(\zeta + 1), \quad \zeta = \frac{p \eta_1}{\eta_1 - 1} + \frac{q \eta_2}{\eta_2 + 1} - 1.$$

プット・コール・パリティよりプット・オプションの価格は,

$$\begin{aligned}\psi_P(0) - \psi_C(0) &= e^{-rT} \mathbf{E}^*[(K - S(T))^+ - (S(T) - K)^+] \\ &= e^{-rT} \mathbf{E}^*[K - S(T)] = Ke^{-rT} - S(0).\end{aligned}$$

#### 4.4.3 数値結果

Kou モデルのヨーロピアン・プット・オプションの価格をモンテカルロ法を用いて求めた。ここでは、原資産価格を変化させた場合のみを示す。

パラメータ

$$\begin{aligned}T = 1.0, K = 100, r = 0.05, \sigma = 0.3, p = 0.4 \\ \eta_1 = 10.0, \eta_2 = 5.0, S_0 = 80, 90, 100, 110, 120\end{aligned}$$

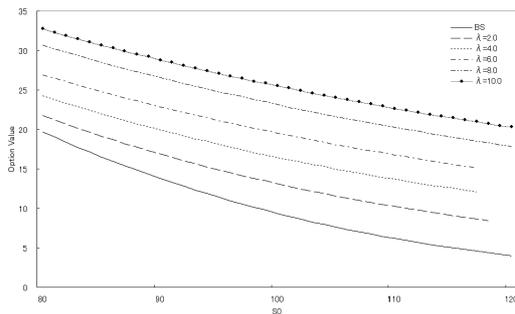


図2 初期資産価格を変化させた場合

BS モデルと同様に、価格は単調に減少し、各  $S_0$  において、 $\lambda$  の値が大きいほど価格は高くなっている。また、 $\lambda$  の値が大きくなるにしたがって、グラフの傾きは緩やかになっている。

#### 4.5 アメリカン・オプション

アメリカン・オプションの価格は有限の自由境界値問題の解である。幾何 Brown 運動モデルのものだけでさえ、配当のないアメリカン・コール・オプションを除けば解析解は存在しない。

##### 4.5.1 アメリカン・プット・オプションの価格の近似

[1] による幾何 Brown 運動モデルの近似を拡張することによって、2 重指数ジャンプ拡散過程の特別な構造を考慮した代替りのアプローチを考える。この拡張では、ヨーロピアン・オプションの価格を含んだだけの解析的近似を導ける。

ここからは、配当なしのアメリカン・プット・オプションに限定する。解析的近似には、初期資産  $v$ 、満期  $t$  であるヨーロピアン・プット・オプションの価格  $\text{EuP}(v, t)$  と、初期資産が  $v$  で、 $t$  での価格が  $K$  より下の確率  $\mathbf{P}^v[S(t) \leq K]$  の 2 つの量が含まれている。

次に (3) において、 $z = 1 - e^{-rt}$ ,  $\beta_3 \equiv \beta_{3,r/z}$ ,  $\beta_4 \equiv \beta_{4,r/z}$ ,  $C_\beta = \beta_3\beta_4(1 + \eta_2)$ ,  $D_\beta = \eta_2(1 + \beta_3)(1 + \beta_4)$  とする。  $v_0 \equiv v_0(t) \in (0, K)$  を、等式

$$\begin{aligned}C_\beta K - D_\beta[v_0 + \text{EuP}(v_0, t)] \\ = (C_\beta - D_\beta)Ke^{-rt} \cdot \mathbf{P}^{v_0}[S(t) \leq K],\end{aligned}\quad (5)$$

の唯一つの解とする。

$$v_0 + \text{EuP}(v_0, t) = e^{-rt} \mathbf{E}^*[\max(S(t), K) | S(0) = v_0],$$

であるので、(5) の左辺は、 $v_0$  の減少関数であり、

$$C_\beta - D_\beta = \beta_3\beta_4 - \eta_2(1 + \beta_3 + \beta_4) < 0,$$

であるので、(5) の右辺は、 $v_0$  の増加関数である。よって  $v_0$  は、二分法を用いて、容易に得ることができる。

近似

満期が  $t$  で、行使価格が  $K$  のアメリカン・プット・オプションの価格は価値関数  $\psi(S(0), t)$  によって、近似できる。価値関数  $\psi$  は、

$$\psi(v, t) = \begin{cases} \text{EuP}(v, t) + Av^{-\beta_3} + Bv^{-\beta_4}, & (v \geq v_0), \\ K - v, & (v \leq v_0), \end{cases}$$

で与えられる。ここで、

$$\begin{aligned}A = \frac{v_0^{\beta_3}}{\beta_4 - \beta_3} \{ \beta_4 K - (1 + \beta_4)[v_0 + \text{EuP}(v_0, t)] \\ + Ke^{-rt} \mathbf{P}^{v_0}[S(t) \leq K] \} > 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B = \frac{v_0^{\beta_4}}{\beta_3 - \beta_4} \{ \beta_3 K - (1 + \beta_3)[v_0 + \text{EuP}(v_0, t)] \\ + Ke^{-rt} \mathbf{P}^{v_0}[S(t) \leq K] \} > 0.\end{aligned}$$

#### 4.6 永久アメリカン・オプション

Kou モデルにおける、永久アメリカン・プット・オプションの価格を計算する。

##### 4.6.1 永久アメリカン・プット・オプション

定理 4.2. (3) の  $\beta_{3,r}, \beta_{4,r}$  を使って、永久アメリカン・プット・オプションの価格は、 $\psi(S(0)) = V(S(0))$  で与えられる。ここで、価値関数  $V$  は

$$V(v) = \begin{cases} K - v, & (v < v_0), \\ Av^{-\beta_{3,r}} + Bv^{-\beta_{4,r}}, & (v \geq v_0), \end{cases}$$

で与えられる。また、

$$\begin{aligned}v_0 &= K \frac{\eta_2 + 1}{\eta_2} \cdot \frac{\beta_{3,r}}{1 + \beta_{3,r}} \cdot \frac{\beta_{4,r}}{1 + \beta_{4,r}}, \\ A &= v_0^{\beta_{3,r}} \frac{1 + \beta_{4,r}}{\beta_{4,r} - \beta_{3,r}} \left[ \frac{\beta_{4,r}}{1 + \beta_{4,r}} K - v_0 \right] > 0, \\ B &= v_0^{\beta_{4,r}} \frac{1 + \beta_{3,r}}{\beta_{4,r} - \beta_{3,r}} \left[ v_0 - \frac{\beta_{3,r}}{1 + \beta_{4,r}} K \right] > 0.\end{aligned}$$

さらに最適停止時刻は、 $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S(t) \leq v_0\}$  で与えられる。

##### 4.6.2 永久アメリカン・ゲーム・オプション

ここでは、 $p = 0, q = 1$ 、すなわち down ジャンプのみの場合を考える。 $G(x) = r$  は、3 つの解  $\beta_1, -\beta_3, \beta_4$  をもち、

$$1 \leq \beta_1 < \infty, \quad 0 < \beta_3 < \eta_2 < \beta_4 < \infty,$$

を満たす．行使価格を  $K$ ，ペナルティを  $\delta$  とし，ともに正の数とする．このときの永久アメリカン・ゲーム・プット・オプションの価格は，

$$V(v) = \inf_{\sigma} \sup_{\tau} J(\sigma, \tau, v), \quad (6)$$

で与えられる．ここで，

$$J(\sigma, \tau, v) = \mathbf{E}^* [e^{-r(\tau \wedge \sigma)} \{ (K - S_{\tau})^+ \mathbf{1}_{\{\tau \leq \sigma\}} + ((K - S_{\sigma})^+ + \delta) \mathbf{1}_{\{\sigma < \tau\}} \} | S_0 = v],$$

である．(6) は，次を満たす

$$(K - v)^+ \leq V(v) \leq (K - v)^+ + \delta.$$

また，最適停止時刻  $\sigma^*, \tau^*$  は， $\sigma^* = \inf\{t > 0; S(t) \in A\}$ ， $\tau^* = \inf\{t > 0; S(t) \in B\}$  で与えられる．

**定理 4.3.** 永久アメリカン・プット・オプションの価格を  $V^*(x)$ ，ペナルティを  $\delta^* = V^*(K)$  とする．このとき  $\delta > \delta^*$  ならば  $A = \emptyset$ ， $\delta < \delta^*$  ならば  $A = \{K\}$  となる．永久アメリカン・ゲーム・プット・オプションの価格は， $\psi(S(0)) = V(S(0))$  で与えられ，価値関数  $V$  は

$$V(v) = \begin{cases} K - v, & (v < v_0), \\ K - v_0, & (v = v_0), \\ Av^{-\beta_{3,r}} + Bv^{-\beta_{4,r}} + Cv^{\beta_{1,r}}, & (v_0 < v < K), \\ \delta, & (v = K), \\ Ev^{-\beta_{3,r}} + Fv^{-\beta_{4,r}}, & (v > K). \end{cases}$$

ここで  $A, B, C, E, F$  は，

$$A = \frac{(\eta_2 + \beta_{3,r})v_0^{\beta_{3,r}}}{\eta_2(\beta_{4,r} - \beta_{3,r})(\beta_{1,r} + \beta_{3,r})} \cdot \left\{ \beta_{1,r}\beta_{4,r}K - \frac{v_0\eta_2}{\eta_2 + 1}(\beta_{1,r} - 1)(\beta_{4,r} + 1) \right\},$$

$$B = \frac{(\beta_{4,r} - \eta_2)v_0^{\beta_{4,r}}}{\eta_2(\beta_{4,r} - \beta_{3,r})(\beta_{1,r} + \beta_{4,r})} \cdot \left\{ \beta_{1,r}\beta_{3,r}K - \frac{v_0\eta_2}{\eta_2 + 1}(\beta_{1,r} - 1)(\beta_{3,r} + 1) \right\},$$

$$C = \frac{(\eta_2 + \beta_{1,r})v_0^{-\beta_{1,r}}}{\eta_2(\beta_{4,r} + \beta_{1,r})(\beta_{3,r} + \beta_{1,r})} \cdot \left\{ \beta_{3,r}\beta_{4,r}K - \frac{v_0\eta_2}{\eta_2 + 1}(\beta_{3,r} + 1)(\beta_{4,r} + 1) \right\},$$

$$E = A + C \frac{(\beta_{4,r} + \beta_{1,r})(\eta_2 - \beta_{3,r})}{(\beta_{4,r} - \beta_{3,r})(\eta_2 + \beta_{1,r})} K^{\beta_{1,r} + \beta_{3,r}},$$

$$F = B + C \frac{(\beta_{3,r} + \beta_{1,r})(\beta_{4,r} - \eta_2)}{(\beta_{4,r} - \beta_{3,r})(\eta_2 + \beta_{1,r})} K^{\beta_{1,r} + \beta_{4,r}}.$$

さらに，最適停止時刻は， $\tau^* = \inf\{t \geq 0 : S(t) \leq v_0\}$  で与えられる．

**補題 4.4.** 関数  $V(x)$  が次の性質を持つとする．

- (1)  $(K - v)^+ \leq V(v) \leq (K - v)^+ + \delta$ ， $\forall v > 0$ .
- (2)  $0 < v < v_0 < K$  で  $V(v) = K - v$ ，かつ  $(\mathcal{L}V)(v) - rV(v) < 0$ ， $V'(v_0) = -1$ .

(3)  $v_0 < x_K$  および  $K < v < \infty$  で， $(\mathcal{L}V)(v) - rV(v) = 0$ .

(4)  $K$  で  $V(K) = \delta$ ，かつ  $V'(K-) < V'(K+)$ .

このとき  $V$  は，永久アメリカン・ゲーム・プット・オプションの価格であり，買い手の行使領域は  $[0, v_0]$ ，売り手の行使領域は 1 点  $\{K\}$  である．

$K$	100	100
$\eta_2$	10	10
$\beta_3$	5	5
$\beta_4$	15	25
$v_0$	85.9375	88.141
$\delta^*$	6.019902	5.60285
$\delta$	6.019900	5.60284
$A$	$5.859 * 10^{10}$	$5.5414 * 10^{10}$
$B$	$1.60902 * 10^{29}$	$6.14483 * 10^{48}$
$C$	$-3.85747 * 10^{-26}$	$-7.2246 * 10^{-26}$
$\beta_1$	10	10
$E$	$5.859 * 10^{10}$	$5.514 * 10^{10}$
$F$	$1.60902 * 10^{29}$	$6.14429 * 10^{48}$

表 1 永久ゲーム・アメリカン・プット・オプションにおける  $A, B, C, E, F$  の値

## 5 おわりに

本研究では，Merton モデル，Kou モデルに焦点を当てて，いろいろなオプションの価格を求めてきた．ジャンプ拡散モデルは，BS モデルでは表現できない市場の特徴を，よりうまく表現でき，オプション等の価格付けには非常に有用であると考えられることができる．

しかし，ジャンプ拡散モデルには，Brown 運動のほかに，Poisson 過程による不確実性が含まれており，BS モデルのように，原資産とオプションを用いて，不確実性のないポートフォリオを構築できない．つまり，非完備性の問題が生じ，この問題はさらに研究していく必要がある．

## 参考文献

- [1] Barone-Adesi, G., R. E. Whaley, Efficient analytic approximations of American option values, *Journal of Finance* **42**, 301-320, (1987).
- [2] Kou, S.G., A Jump Diffusion Model for Option Pricing, *Management Science* **48**, 1086-1101, (2002).
- [3] Kou, S. G., H. Wang, First passage times for a jump diffusion process, *Advances in Applied Probability* **35**, 504-531, (2003).
- [4] Merton, R.C., Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous, *Journal of Financial Economics* **3**, 125-144, (1976).