VaR の算出方法
— 極値論とヒストリカル法の比較分析 —

M2004MM005 服部 隆宏
指導教員　伏見 正則

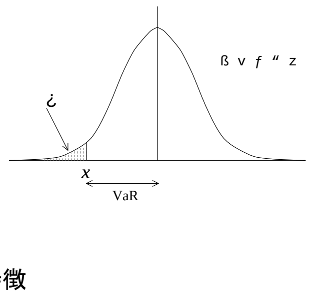
1　はじめに

本稿では、金融機関のリスク管理において広く用いられている、バリュー・アット・リスク（以下 VaR）の算出方法について分析する。VaR の算出方法の代表的なものには、分散共分散法、モンテカルロ法、ヒストリカル法の３つがある。しかしそれぞれの方法に対して、分散共分散法は、収益率分布に正規分布を仮定する点、モンテカルロ法は、ポートフォリオが大きくなった時にシステムの負荷が大きくなる点、ヒストリカル法は、過去のデータに一様に重みを与えているため直近の変動を捉えにくいという点において、実務で扱うのにあまり適していないと考えられる。そこで本稿では、Boudoukh, Richardson and Whitelaw が提案した、一般的なヒストリカル法と違いデータに重みを加えたヒストリカル法（以下 BRW 法) と、近年注目されている極値論 (以下 EVT) による VaR の算出方法を比較し、リスク管理実務において望ましい VaR 算出方法を検証する。BRW 法は、資料 [3] で様々なヒストリカル法の中で最も優れているとされ、EVT による方法は、資料 [2] でモンテカルロ法より優れているとされた。また、比較対照の 1 つとして一般的なヒストリカル法 (以下 Normal) でも VaR を算出した。

2　VaR

2.1　VaR の定義

今後、将来の特定の期間内（保有期間）に、ある一定の確率の範囲内（信頼水準）で、ポートフォリオの現在価値がどの程度まで損失を被るか（損失値の最大値）を、過去のある一定期間（観測期間）のデータをもとに、理論的に算出された値をいう。



2.2　VaR の特徴

1. 様々なポートフォリオのリスクを、「一定の確率のもとでの損失確率」という共通の尺度で比較可能。
2. 様々なリスク要因相互の関連を考慮し、投資戦略の全体の予想損益変化を認識できるため、自己資本等との比較が可能である。
3. 統計的手法により、理論的な裏づけがある。

3　収益率

リスク管理では、収益率が望ましい測定対象であり、本稿での計算方法は、次式の連続複利収益率を用いた。

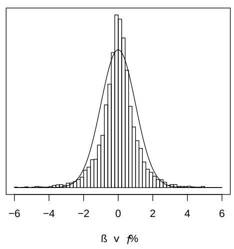
$$r_t = \log\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

3.1　非正規性とファット・テール

収益率の分布が正規分布でないということは、近年の研究、実務において広く認識されてきている。収益率の分布と正規分布との違いとして以下の３つの事がある。

1. 収益率分布の方が中心部分は高い。
2. 収益率分布の方が両サイド（中心部分と裾部分の間）は低い
3. 収益率分布の方が裾部分は高い (ファット・テール)

実際に 1980 年 1 月 4 日から 2004 年 12 月 30 日までの TOPIX の収益率をヒストグラムで表し、正規分布を重ねてみると下図のようになる。



4　ヒストリカル法

4.1　ヒストリカル法の概論

過去に生じたリスク・ファクターの変動が将来も起きるという市場の定常性を仮定。過去のデータに一様の重みを与えているため、直近の変動の特徴を捉えにくい。

4.2　ヒストリカル法による VaR の計算方法

まず、VaR 評価時点からさかのぼり、過去の収益率データ n 日分の日次データ $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ を集める。次に、この収益率のデータを小さい順に並べかえる。この順序に従った k 番目の収益率を $r_{(k)}$ とすると、順序に並びかえたデータは $(r_{(1)}, r_{(2)}, \ldots, r_{(n)})$ となる。そして各データ $r_{(k)}$ が代表する確率水準 (階級値) を算出する。
ここで、例えば n が 250 としたとき、3 番目に小さいデータが 0.8 ∼ 1.2% を代表する値で、階級値は 1% となる。

よって信頼水準を 99% とすれば、階級値が 1% である小さい方から 3 番目の収益率が VaR となる。

$$\mathrm{VaR}_{0.01} = r_{(3)}$$

5 BRW 法

損益シナリオに指数的に減少する重み付けをし、収益率の直近の変動パターンを重視するようにした手法である。

5.1 BRW 法のアルゴリズム

現時点から $1, 2, \ldots, T$ 営業日前の株価の変動によって、T 個の収益率 $\{r_1, r_2, \ldots, r_T\}$ が得られたとする。

1. 収益率 $\{r_1, r_2, \ldots, r_T\}$ に対して、過去にさかのぼるに従って一定の割合 $\lambda(0 < \lambda < 1)$ で減少する重み $\{w_1, w_2, \ldots, w_T\}$ を次式で与える。

$$w_i = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^T}\lambda^{i-1}$$

   λ は減衰因子と呼ばれる定数で、この値が小さいほど直近のデータを重視することになる。

2. 収益率 $\{r_1, r_2, \ldots, r_T\}$ を昇順に並び替えた順序統計量を $\{r_{(1)}, r_{(2)}, \ldots, r_{(T)}\}$ とし、それぞれの与えられた重みを $\{w_{(1)}, w_{(2)}, \ldots, w_{(T)}\}$ とする。VaR の信頼水準を $100(1-p)\%$ とするとき、収益の小さいものから順に重みを足し上げていき、p に達したときの収益率を VaR の推定値とする。正確に p にならない場合には、線形補間により VaR を求める。
   (a) $\sum_{i=1}^{k} w_{(i)} \leq p \leq \sum_{i=1}^{k+1} w_{(i)}$ のとき

$$\begin{aligned}\mathrm{VaR}_p = \{(p - &\sum_{i=1}^{k} w_{(i)}) r_{(k+1)} \\ &+ (\sum_{i=1}^{k+1} w_{(i)} - p) r_{(k)}\}/w_{(k+1)}\end{aligned}$$

   (b) $w_{(1)} \geq p$ のとき

$$\mathrm{VaR}_p = r_{(1)}$$

6 EVT

6.1 EVT の理論

EVT の基本概念は、ある確率分布の裾部分のみに注目している場合、全てのデータを用いて全部の分布形を推定するよりも、裾に関連したデータのみを用いて、裾の形状自体をモデル化した方がよいということも有り得る、ということである。

EVT における重要なことは、裾の厚い分布の確率変数 x においては、右裾は必ず、

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1-F(tx)}{1-F(t)} = x^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad x > 0$$

となる点である。α はテール・インデックス、$F(\cdot)$ は分布関数を表す。ここで重要なことは、x が従う分布が何であっても、裾は共通の形状を持ち、関連するパラメータは α のみである点である。また、左裾への応用もデータの符号を換えることで容易に行える*1。データが裾の厚い分布から生成されていれば、その分布は一次近似としてパレート・タイプの裾、すなわち $x \to \infty$ となるに連れ、

$$P\{X > x\} \approx ax^{-\alpha}, \quad a > 0, \quad \alpha > 0$$

となる。また、左裾部分の分布形が、

$$F(x) \cong \frac{m}{n}\left(\frac{x}{X_{(m+1)}}\right)^{-\alpha} \tag{1}$$

と表せることが分かっている。n は観測値の数、m は裾として認識しているデータ数、$X_{(m+1)}$ は観測値の順序統計量、つまり $X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \ldots \geq X_{(m)} \geq \ldots \geq X_{(n)}$ から選択されたもので、裾を規定する閾値である。また、パラメータ α は裾の厚みを表す重要なもので、その値により次のように解釈できる。

1. $\alpha = \infty$ ならば、裾は指数的に減少する。つまり正規分布とほぼ同様となる。
2. $\alpha < \infty$ ならば、裾は厚いことになり、α は有限なモーメント数を表す。

6.2 EVT の VaR への適用方法

VaR の推定に EVT を用いる時は、左裾の推定、すなわち α と m を推定することになる。(1) 式は VaR 予測における基礎的な式である。なぜなら、α と m が推定できれば、n も加えることにより、どのような分位点と確率も計算できる。実際に VaR_p を求める場合には、$p \geq m/n$ の時はヒストリカル法と同じ方法で $q(p)$ を求める。$p < m/n$ ならば、(1) 式を用いて、対応する分位点 $q(p)$ を求める。

6.3 パラメータの推定

最適な閾値レベル m^* を選択するのは重要である。なぜなら、m を変えると α の推定値、さらにはリスク推定値そのものも大きく変わるからである。最適な閾値 m^* の選択方法として次のような手法を用いる。

1. パラメータの逆数 $1/\hat{\alpha}$ は漸近的に正規分布に従う。
2. 従って、$1/\hat{\alpha}$ の漸近的平均二乗誤差 (Asymptotic Mean Square Error、以下 AMSE) を構築する。
3. ただし、通常 $1/\hat{\alpha}$ にはバイアスや分散が含まれていることから、それを考慮し、
   (a) 分散とバイアスの両方が m の選択によって影響されることから、バイアスと分散が同じ割合で消滅していくように m を選ぶのが最適。
   (b) 従って、AMSE が最小化される水準が、最適な閾値レベル m^* を与えてくれる、すなわち、以下が成立する。

*1 収益率データ全てにマイナス 1 をかける

$$m^* = \arg\min_m \mathrm{AMSE}\left[\left(\frac{1}{\hat{\alpha}} - \frac{1}{\alpha}\right)^2\right]$$

ここで、AMSE は本稿では Danielsson and de Vries [4] で提唱されている二重サブ・サンプル・ブートストラップ法を用いる。二重サブ・サンプル・ブートストラップ法を用いての $m, 1/\hat{\alpha}$ の推定、及び VaR を求めるまでのアルゴリズムは以下のようになる。

1. n 日間の収益率データ $X_1 \sim X_n$ を用意する。用いる式は以下の式である[*2]。

$$\begin{aligned}
n_1 &= (n^{1-\varepsilon}), \qquad 0 < \varepsilon < 1/2 \\
n_2 &= (n_1)^2/n \\
u_k(m_n) &\equiv \frac{1}{m_n}\sum_{i=1}^{m_n}\left(\log\frac{X_{(i)}}{s_n}\right)^k, s_n = X_{(m_n+1)} \\
w_k(m_n) &\equiv \hat{1/\alpha} = \frac{u_k(m_n)}{k u_{k-1}(m_n)}{}^{*3}, \quad u_0(m_n) = 1 \\
z(m_n, n) &\equiv w_2(m_n) - w_1(m_n)
\end{aligned}$$

2. 収益率データから復元抽出で n_1 個データを選び降順で並べ $(X_{(1)} \geq X_{(2)} \geq \ldots \geq X_{(n_1)})$、1 の手順で $z(m_{n_1}, n_1)$ を計算する。
3. 2 を R 回繰り返し、次式を計算する。

$$\frac{1}{R}\sum_{r=1}^{R}[z_r(m_{n_1}, n_1)]^2 \qquad (2)$$

4. 3 の m_{n_1} の値を色々変化させ、(2) 式の値が最小になる時の m_{n_1} を $\hat{m}_{n_1}$ とする。
5. 2 ∼ 4 までの n_1 を n_2 に変化させ $\hat{m}_{n_2}$ を求める。
6. まだ n_1 は未知数なので次式により決める。

$$\arg\min_{n_1} \frac{\left[\widehat{\mathrm{AMSE}(z_{n_1})}\right]^2}{\widehat{\mathrm{AMSE}(z_{n_2(n_1)})}} \qquad (3)$$

7. 6 により決められた n_1 による 4、5 で求めた $\hat{m}_{n_1}, \hat{m}_{n_2}$ を用いて、次式を計算し $\hat{m}_n$ を求める。

$$\hat{m}_n(w_2) = \frac{(\hat{m}_{n_1}(z))^2}{\hat{m}_{n_2}(z)}\left[\sqrt{2}\frac{\log \hat{m}_{n_1}(z)}{2\log n_1 - 2\log \hat{m}_{n_1}(z)}\right]^{\frac{2\log n_1 - 2\log \hat{m}_{n_1}(z)}{\log n_1}}$$

8. $w_2(\hat{m}_n)$ より $1/\hat{\alpha}$ を求め、次式より VaR を求める。

$$\mathrm{VaR}_p = \begin{cases} X_{(m+1)}\left(\frac{m}{np}\right)^{1/\hat{\alpha}} & p < m/n \\ X_{(np)} & p \geq m/n \end{cases}$$

7 モデルの評価指標

1. 信頼区間を超えるリスクが発生した超過回数を検証

VaR の全算出日数に対して、損失額が VaR を超過した日数の比率を調べる。信頼水準を 99% とすると、この比率は 1% 近傍になることが望ましい。

2. VaR の平均値を検証

VaR を必要自己資本額の基準としているため、VaR が小さい方が自己資本額が小さくすむ。

3. VaR の年率ボラティリティを検証

VaR のボラティリティが大きいと、BIS 規制により VaR の 3 倍以上の自己資本額を必要とされている主要金融機関は、必要以上に自己資本を積んでおくことになり、ポジション限度として VaR が用いられているトレーダーは、ポジション調節が不可能となってしまうため、VaR のボラティリティは小さい方がよい。

[*2] 式の意味的なことは本論文か [4] を参照

[*3] k=1 のときの推定値は Hill 推定量として知られている。

8 分析

8.1 データ

TOPIX、S&P500 を分析対象とし、VaR の算出期間は TOPIX は 1980 年 1 月 4 日から 2004 年 12 月 30 日 (6484 営業日)、S&P500 は 1980 年 1 月 2 日から 2004 年 12 月 31 日 (6312 営業日) とした。

8.2 VaR 算出手法の設定

VaR の信頼水準は 99% とした。BRW 法では、減衰因子 λ は 0.95、0.97、0.99、0.999、0.9999 の 5 種類、観測期間 T は 250、500、750、1000 営業日の 4 種類に分類するため、合計では 20 種類に分類し、EVT で VaR の算出をする過程では次のような設定をしたが、0.97、0.999 の数値結果ついては本論文を参照。。 ・データの観測営業日 n を 1500 とする。 ・ n_1 の値を 400 から 1200 まで 50 間隔で変化させ、式 (3) より最適な n_1 を求める。 ・繰り返す回数 R を 200 とする。

8.3 モデルの変動の特徴

日次算出結果をグラフで表す (本論文を参照) と次のことが分かる。

・BRW 法

VaR の値を超えるような負の収益率があると VaR が大きくなり、その後また VaR を超えるような負の収益率がくるまで、VaR の値は減少していく。

・$\lambda = 0.9999$

BRW 法の中では最も変動が少ない。収益率の大きなマイナスにも反応はするが、他の λ の値ほどは反応せず、またその後しばらくの間はほとんど VaR は小さくならない。

・$\lambda = 0.99$

$\lambda = 0.9999$、$\lambda = 0.95$ の中間的な動きをする。

・$\lambda = 0.95$

直近のデータにとても影響され、変動が激しい。収益率の大きなマイナスに大きく反応するが、その後急激に VaR が小さくなる。

・一般的なヒストリカル法 (Normal)

BRW 法の $\lambda = 0.9999$ の動きに近いが、VaR の値が高くなる時期では、算出した VaR の値が $\lambda =$

0.9999 より一般的なヒストリカル法の方が小さい。

・EVT

変動が小さく安定しており、収益率の大きなマイナスにも反応は少ない。

8.4 分析結果

はじめに、BRW 法について分析する。

超過率 観測日数は、$\lambda = 0.9999$、$\lambda = 0.99$ では、観測日数が短い方がパフォーマンスが良く、$\lambda = 0.95$ では逆に観測日数が長い方がパフォーマンスが良くなる。λ については、$\lambda = 0.95$ がパフォーマンスが悪く、$\lambda = 0.9999$、$\lambda = 0.99$ については、優劣を付けるのが難しい。

VaR の平均値 $\lambda = 0.9999$、$\lambda = 0.99$ では同じような値であり、$\lambda = 0.95$ では値が小さくなっている。

VaR のボラティリティ λ の値が小さい程ボラティリティが大きくなっている。

以上の事から、超過率の精度の高さ、VaR のボラティリティの低さから、BRW 法では観測日数 250 日、$\lambda = 0.9999$ のモデルが最も優れていると考えられる。

次に BRW 法、Normal、EVT のモデルについて分析する。図 1 のように、大きな負の収益率があると、それ以降に収益率のボラティリティが上がることが実証されているが、EVT は大きな負の収益率があっても反応が小さいため、収益率のボラティリティ上昇による連続した大きな負の収益率が毎回 VaR を超過してしまうことが良くない。

よって、EVT による VaR の算出よりもヒストリカル法の方がパフォーマンスが良く、さらに超過率の精度からして、直近のデータに重みを与える BRW 法 (λ=0.9999、250 日) が最もパフォーマンスが良いという結論になる。

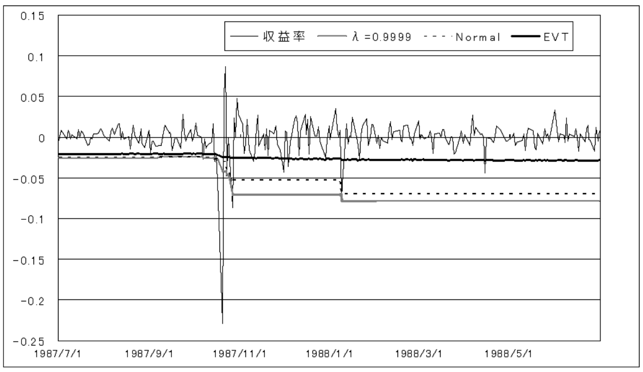


図 1 S&P500(1987 年 7 月− 1988 年 6 月)

9 おわりに

研究により、VaR の算出方法としては BRW 法の $\lambda =$ 0.9999、観測日数 250 日が最も優れていることが分かった。

表 1 TOPIX-超過率

観測日数	0.9999	0.99	0.95	Normal
250	0.0116	0.0114	0.0370	0.0145
500	0.0130	0.0123	0.0321	0.0143
750	0.0122	0.0130	0.0290	0.0128
1000	0.0123	0.0131	0.0284	0.0136

表 2 TOPIX-VaR の平均値

観測日数	0.9999	0.99	0.95	Normal
250	-0.0292	-0.0295	-0.0213	-0.0270
500	-0.0277	-0.0286	-0.0220	-0.0270
750	-0.0281	-0.0282	-0.0230	-0.0275
1000	-0.0278	-0.0279	-0.0230	-0.0273

表 3 TOPIX-VaR のボラティリティ

観測日数	0.9999	0.99	0.95	Normal
250	0.2074	0.3199	1.0443	0.2049
500	0.0919	0.3306	0.9322	0.0872
750	0.0540	0.3539	0.9400	0.0604
1000	0.0465	0.3752	0.9211	0.0488

表 4 S&P500-超過率

観測日数	0.9999	0.99	0.95	Normal
250	0.0103	0.0105	0.0314	0.0128
500	0.0114	0.0105	0.0263	0.0130
750	0.0128	0.0109	0.0266	0.0136
1000	0.0135	0.0111	0.0255	0.0144

表 5 S&P500-VaR の平均値

観測日数	0.9999	0.99	0.95	Normal
250	-0.0267	-0.0278	-0.0216	-0.0247
500	-0.0255	-0.0267	-0.0222	-0.0249
750	-0.0256	-0.0265	-0.0222	-0.0251
1000	-0.0248	-0.0264	-0.0223	-0.0243

表 6 S&P500-VaR のボラティリティ

観測日数	0.9999	0.99	0.95	Normal
250	0.1566	0.3021	1.0101	0.1547
500	0.0753	0.3045	0.9200	0.0709
750	0.0485	0.3120	0.9111	0.0506
1000	0.0382	0.3202	0.8988	0.0369

表 7 EVT

データ	超過率	VaR の平均値	VaR のボラティリティ
TOPIX	0.0168	-0.0247	0.2379
S&P500	0.0139	-0.0244	0.2295

参考文献

[1] 山下智志 : 市場リスクの計量化と VaR, 朝倉書店 , 2003.

[2] ジョン・ダニエルソン 森本祐司 : 市場リスクの予測について− EVT と GARCH モデルを用いたバリュー・アット・リスク算定の比較分析, IMES DISCUSSION PAPER SERIES No. 2000-J-15, 日本銀行金融研究所 (2000).

[3] 安藤美孝: ヒストリカル法によるバリュー・アット・リスクの計測−市場価格変動の非定常性への実務的対応, IMES DISCUSSION PAPER SERIES No. 2004-J-10, 日本銀行金融研究所 (2004).

[4] Danielsson, Jon and Casper G.de Vries: Beyond the sample:Extreme quantile and probability estimation,http://www.tinbergen.nl/discussionpapers/98016.pdf − 1997.