特性関数と FFT を使ったオプション価格付けに関する研究

2007MI168 西明 大祐　　2007MI201 佐野 正和　　2007MI246 共田 幸弘

指導教員　石崎 文雄

1　はじめに

近年, 現実の金融の世界で金融派生商品 (デリバティブ) が重要な役割を果たすようになっている. それに伴い, 金融派生商品の一種であるオプションの価格付けに関する研究が盛んに行われている. オプションの価格付けに関する最も基本的な研究課題は次のようなものである. まず原資産の価格過程と呼ばれる確率過程 $\{X(t)\}$ $(0 \leq t \leq T)$ があり, そのランダムな動きの結果に依存して最終時点 $(t = T)$ でのその価格が定まるようなオプションがある. このとき, 「現時点 t でのこのオプションの価格はどのように定まるか？」という問いが基本的な課題である [7, 8]. この問いに対して回答を与えることが, オプション価格理論の基本的な課題である. オプション価格理論に対する古典的かつ標準的な回答の一つとして Black-Scholes の理論がある. Black-Scholes によるオプション価格理論は, 「原資産の価格過程が幾何 Brown 運動で記述できるという仮説のもと, オプション価格は, そのオプションの収益の同値 martingale 測度についての期待値として与えられる」という理論である. ヨーロッパ型オプションの場合に関して, その理論価格を得るための Black-Scholes の公式 (BS 式) と呼ばれる計算式が導出されており, 実務で広く使われている. BS 式は, 標準正規分布の分布関数を含む単純な式で, 計算も容易である. しかし,BS 式にはいくつかの問題点を持っていることが過去の多くの実証的な検証, 研究により指摘されている.

それを克服するためのアプローチの一つは,BS 式より現実に即した確率過程モデルに置き換えてオプション価格理論を構築することである.BS 式より現実に即した確率過程モデルではその積分・偏微分方程式を解析的に解くことは一般に非常に難しい. また, 数値解析的にその積分・偏微分方程式の解を近似的に計算することも困難である. そのため, 原資産の価格過程モデルとして幾何 Brown 運動よりも現実に即した確率過程モデルを採用し, かつ, オプション価格を実用的な計算時間で容易に計算出来る理論, 数値計算法の研究が現在盛んに行われている. その理論, 数値計算法として特性関数と FFT(fast Fourier Transform) を利用したものが近年注目を浴びている [3, 4, 5].

本研究では,[3, 4, 5] において示された特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法に着目し, その有効性に関する実証的研究を行う. 最初に, 価格過程として幾何 Brown 運動を考え, 特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法を適用する. BS 式によって計算されたオプション理論価格と特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法によって計算されたオプション理論価格を比較し, 特性関数と FFT を利用した計算方法の特徴, 誤差等を検討する. 次に, 価格過程として Heston モデル [6](以後 HES と記す) をジャンプを含むように拡張したモデル [1, 2](以後 HESJ と記す) を考える. HESJ モデルは, ボラティリティが確率微分方程式によって表現される確率過程によって時間的に変化するモデル (stochastic volatility(SV) モデルと呼ばれる) に属し, 幾何 Brown 運動モデルよりも現実に即したモデルであると考えられている. HESJ モデルのもとで, 特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算方法を確立し, それを日経平均 225 オプションに適用してその実務的な有効性を検討する.

2　計算方法

特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法は大まかに言えば, 以下で示される原理に基づいた方法である.

1. オプション理論価格を, それぞれ,cash-or-nothing オプションと asset-or-nothing オプションと関連付けられる 2 つの確率測度を使って表現する [4]. この 2 つの確率測度は, それぞれ,money-market-adjusted 確率測度, stock-adjusted 確率測度とも呼ばれる [5].
2. 得られたオプション理論価格を対数権利行使価格の関数と見て, Fourier 変換を行い, その Fourier 変換 (簡単のため以後, オプション価格 Fourier 変換と呼ぶことにする) と原資産の価格過程の基礎となる分布の特性関数 (簡単のため以後, 原資産価格過程特性関数と呼ぶことにする) を関連付ける解析的な式を確立する.
3. 確立した解析的な式から, オプション価格 Fourier 変換を原資産価格過程特性関数を含む式で表し, それを Fourier 逆変換することでオプション価格を得る.
4. この最後の Fourier 逆変換する部分で FFT を使用することで, オプション理論価格が実用的な計算時

間で計算できる.

この特性関数と FFT を利用した方法により計算が容易になる理由は, 原資産の価格過程に関する分布が解析的に扱いやすい形を持たない場合でも, その特性関数は比較的解析的に取り扱いやすい形になっていることが多いからである.

3 BS 式と比較した数値例

本節では,BS 式によって計算されたヨーロッパ型コールオプションの理論価格と本研究で調査している特性関数と FFT を使用して計算されたヨーロッパ型コールオプションの価格を比較し, その誤差を調べる. BS 式によって計算されたオプション価格を真の値とみなし, 特性関数と FFT を使用して計算されたコールオプション価格の誤差を, 権利行使価格の関数として示したものである. 図 3.1 では比較の基準となるデータとしてパラメータを以下のように設定した.

- 原資産価格=1 円
- 短期金利=1%
- ボラティリティ=20%
- 残存期間=1 年

尚, 縦軸の範囲において $e-016=10^{-16}$ であり, 横軸は取引の現実的な範囲として 4 割前後の範囲を切りぬいた.

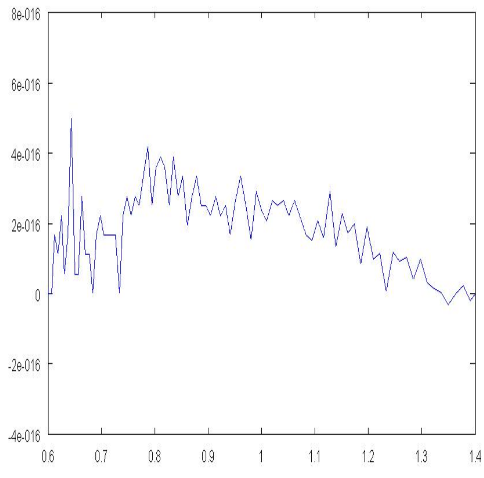

図 1 FFT-BS の誤差のグラフ

図 1 おいては, 以下のことが観察できる. in the money のとき, このグラフにおいては最も誤差がよく出るが, 誤差は小さな値で比較的安定していると言える. 尚, ほぼ誤差はプラスなので特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法の方が,BS 式によって計算されたオプション理論価格よりも高く算出していることが分かる.

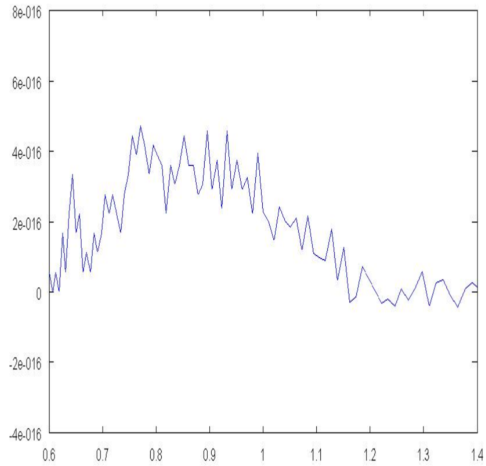

図 2 残存期間 0.3 年

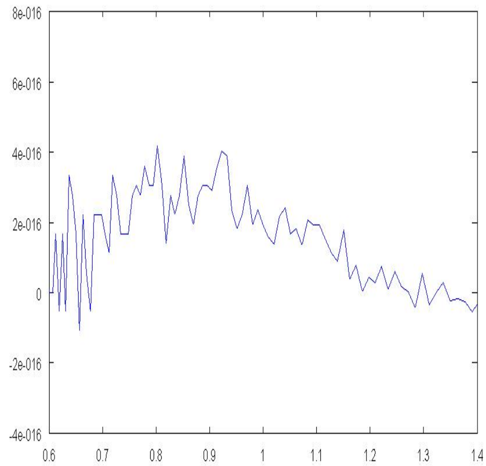

図 3 残存期間 0.5 年

図 2, 図 3 は残存期間の値を変えて比較した場合である. 図 2 では残存期間を 0.3 年に, 図 3 では残存期間を 0.5 年に設定し, それ以外のパラメータは図 1 と同じ値に設定した. 図 2, 図 3 とも権利行使価格のほぼ全域で, 誤差はプラスの値となり, 特に in the money のときに

大きい. また, 図 1(残存期間=1.0 年) と比較すると, 残存期間が長いほど誤差が安定して少ないことがいえる.

4 HESJ モデルによる計算例

本節では,HESJ モデルのもとで特性関数と FFT を利用したオプション価格計算を日経平均 225 オプションに適用し, その実務的な有効性を検討する.

日経平均 225 のデータは,2010 年コールオプション取引のデータの中から

- オプション価格が 4 円以上
- 権利行使価格がその日の日経 225 先物の価格の 0.7-1.3 倍
- その日の取引量が 30 以上
- オプション価格 > 先物価格 - 権利行使価格を満たす (裁定機会があるオプションを取り除く)
- 残存日数が 3 日より大きく 183 日より小さい

のものを使用する. 図 4 は,2010/1/4 の市場で取引された実際のオプション価格と HESJ モデルによって推定したオプション価格を, 権利行使価格とオプションの残存期間の関数として示したグラフである. 尚, ○は市場価格を示し,*は HESJ モデルによる推定価格を示している.

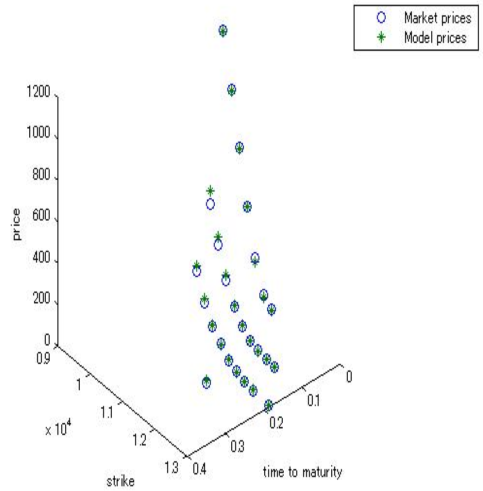

図 4 2010/1/4 のオプションデータのグラフ

また, 表 1 は, それぞれ図 4 のグラフの数値を表に示したもので, グラフにはない値（権利行使価格, 日経 225 先物の価格）を対応させたものである.

2010/1/4 のデータ（図 4, 表 1) において, 残存期間が 4 日以下のオプションに着目すると,in the money のものはオプション価格が高いのにもかかわらず,HESJ モデルによる推定価格は市場価格に非常に近い値を示し良い結果が得られている. 逆に out of the money のもので HESJ モデルによる推定価格は市場価格より低くなってしまう傾向が見られる.

表 1 2010/1/4 のオプションデータ

権利行使価格 (円)	先物価格 (円)	残存期間 (日)	市場価格 (円)	HESJ (円)
12000	10640	97	70	80.1
12000	10640	67	40	76.0
12500	10640	67	13	14.3
12250	10640	67	20	22.0
12000	10640	67	40	36.0
11750	10640	67	60	60.6
11500	10640	67	105	101.7
11250	10640	67	155	165.6
11000	10640	67	235	258.0
10750	10640	67	355	381.8
10640	10640	39	6	6.2
12000	10640	39	12	9.5
11750	10640	39	20	22.0
11500	10640	39	35	35.6
12000	10640	39	70	73.1
11000	10640	39	135	141.5
10750	10640	39	225	249.9
10500	10640	39	365	402.3
10250	10640	39	530	590.5
11000	10640	4	10	2.6
10750	10640	4	45	33.2
10500	10640	4	190	176.3
10250	10640	4	410	407.5
10000	10640	4	660	655.6
9750	10640	4	905	904.4
9500	10640	4	1160	1153.3

また 2010/1/4 のデータを含め 4 日分のデータを取り総合的に分析すると, 全体的に誤差はあまり無いが, 誤差には次のような特徴が見られた.

- 残存期間が 10 日程度以下で in the money のオプションでは,HESJ モデルによる推定価格は市場価格に近く良い結果が得られる.
- 残存期間が 10 日程度以下で out of the money のオプションでは,HESJ モデルによる推定価格は市場価格より低くなる傾向がある.
- 残存期間が 100 日程度以上のオプションでは,HESJ モデルによる推定価格は市場価格より低くなる傾向がある.

5 まとめと今後の課題

オプション価格を予想する際にシンプルで使い易い BS モデルが一般的に使用されるが, 原資産の価格過程が幾何 Brown 運動で表されるという仮説では, 部分的にしか金融市場の複雑さを満たしていない. そこで過去数十年間において, BS モデルの最も制限の厳しい前提条件を緩和する, より現実的なアプローチの研究が盛んに行われた. 研究されたモデルは多種多様な株価, 金利, リスク, 市場価格の異なるプロセスを想定して提案された. その中で最も高い関心を集めたのが確率的ボラティリティ（SV）モデルであり, 我々はそれに属する HES モデルに注目した. さらに, ジャンプ過程を持つ　HES モデル, すなわち HESJ モデルをより一般化し, モデルキャリブレーションの過程で, 特性関数と FFT を用いたオプション価格計算法を研究した.

まず FFT アルゴリズムの実用性について, 特性関数と FFT を利用したオプション価格計算法を利用し研究した. それは、比較的扱いやすい BS 式（正規分布）の特性関数を用いて, FFT アルゴリズムの実用性を調べるというものであり, 今回の研究の結果においては BS 式によって計算されたオプション理論価格と, 正規分布の特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法によって計算されたオプション理論価格の誤差はほとんどなく, またオプション理論価格の導出速度も高速であった. このことから, 我々の研究では, 特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法は非常に優れたオプション理論価格計算法であるという結論に至った.

次に HESJ モデルの研究を行った. そこでは HESJ モデルのもとでその特性関数と FFT を利用したオプション理論価格計算法を日経平均 225 オプションに適用し, その実務的な有効性を検討した. 残存期間が少ない状況で in the money のオプションでは,HESJ モデルによる推定価格は市場価格に近く, 良い結果が得られた. しかし, 残存期間が少ない状況で out of the money のオプションでは,HESJ モデルによる推定価格は市場価格より低い値を算出する傾向があり, 残存期間が長い状況のオプションにおいても,HESJ モデルによる推定価格は市場価格より低く算出する傾向があった. このような結果を得られたが, 我々の研究だけでは HESJ モデルの実務的な有効性の有無を判断することは難しく, 結論付ける事は難しい. その問題点としては日経平均 225 のデータが少なかった事が挙げられ, 今後の課題としては FTSE など大規模な市場で検証を行うことが挙げられる.

参考文献

[1] G. S. Bakshi, C. Cao, and Z. W. Chen, “Empirical performance of alternative option pricing models,” *Journal of Finance*, 52, pp.2003–2049, 1997.

[2] D. Bates, “Jumps and stochastic volatility: exchange rate processes in Deutschemark options,” *Review of Financial Studies*, 9, pp.69–108, 1996.

[3] P. Carr and D. H. Madan, “Option evaluation using the Fast-Fourier Transform,” *Journal of Computational Finance*, 2(4), pp.61–73, 1999.

[4] U. Cherubini, G. D. Lunga, S. Mulinacci, and P. Rossi, Fourier transform methods in finance, John Wiley & Sons, 2010.

[5] G. Fusai and A. Roncoroni, Implementing models in quantitative finance: methods and cases, Springer, 2008.

[6] S. Heston, “A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options,” *Review of Financial Studies*, 6, pp.327–343, 1993.

[7] D. G. Luenberger 著, 今野浩, 鈴木賢一, 枇々木規雄共訳, 金融工学入門, 日本経済新聞社,2002.

[8] 宮原孝夫, 株価モデルとレヴィ過程, 朝倉書店,2003.