信頼度関数の上下限を用いた近似法

2001MT010 江原　寛昭　　2001MT016 濱田　和宏　　2001MT056 纐纈　英司
指導教員　　尾崎　俊治

1　はじめに

現在の社会における豊かな生活は様々なシステムによって支えられている．そのシステムが正常に稼動する確率である信頼度を上げることと同時にその信頼度を正確に把握することは非常に重要なことである．単純な構造を持つシステムでは信頼度を求めることは比較的容易であるが, システムが複雑化するにつれて難しくなる. 本研究では正確な信頼度を信頼度の上下限という情報から近似する方法について論じる.

2　信頼度についての定義

2.1　信頼度

システムの状態を「稼動状態」と「停止状態」の 2 つに分類し, 稼動している状態を「1」, 故障している状態を「0」とする．つまり,

$$\phi = \begin{cases} 1 & (\text{稼動している状態}) \\ 0 & (\text{故障している状態}) \end{cases}$$

とする (Leemis [1], Aven, Jensen [4]).

2.2　直列構造の信頼度

コンポーネントが直列で並ぶ状態を直列構造とする. 直列構造内の全てのコンポーネントが稼動していて，システム自体が稼動していることになる．よって,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} x_i \end{aligned}$$

となる (Leemis [1]).

2.3　並列構造の信頼度

コンポーネントが並列で並ぶ状態を並列構造とする. 並列構造では並列に並んだコンポーネントのいずれかが稼動していれば，構造自体が稼動していることになる. よって,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \end{aligned}$$

となる (Leemis [1], 猪瀬 [3]).

2.4　k-out-of-n システム

n 個のコンポーネントから成るシステムにおいて，k 個のコンポーネントが稼動していればシステムが機能する時，このシステムは k-out-of-n システムであると言える．このシステムの構造関数は,

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & (\sum_{i=1}^{n} x_i \geq k \text{ の時}) \\ 0 & (\sum_{i=1}^{n} x_i < k \text{ の時}) \end{cases}$$

と表すことができる．信頼度は,

$$\phi(x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

となる (Leemis [1]).

2.5　最小パス集合・最小カット集合

ある n 個のコンポーネントから成るシステムにおいて，$\boldsymbol{x}$ をシステムの状態を表すベクトルとし，以下の 2 つの集合，$C_1(\boldsymbol{x}) = \{i, x_i = 1\}$, $C_0(\boldsymbol{x}) = \{i, x_i = 0\}$ を定義する．

稼動状態を表す $\phi(\boldsymbol{x}) = 1$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ をパス・ベクトル，故障状態を表す $\phi(\boldsymbol{x}) = 0$ を満たすベクトル $\boldsymbol{x}$ をカット・ベクトルと呼ぶ.

$\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}$ となるような $\boldsymbol{y}$ に対して $\phi(\boldsymbol{y}) = 0$ となるパス・ベクトル $\boldsymbol{x}$ を最小パス・ベクトルと言い，$\{C_1(\boldsymbol{x})\}$ を最小パス集合と言う．$\boldsymbol{y} > \boldsymbol{x}$ となるような $\boldsymbol{y}$ に対して $\phi(\boldsymbol{y}) = 1$ となるカット・ベクトル $\boldsymbol{y}$ を最小カット・ベクトルと言い，$\{C_0(\boldsymbol{x})\}$ を最小カット集合と言う.

ここでの $\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}$ は「少なくとも 1 つは $y_i < x_i$ が存在する」という意味である (室津, 米澤, 邵 [2]).

2.6　信頼度の上下限

最も簡単な方法は，すべての coherent system が，直列システムと並列システムの間の信頼度を持っていると定め，制限する方法である．つまり，コンポーネントを n 個持つシステムにおいて,

$$\prod_{i=1}^{n} p_i \leq r(\mathbf{p}) \leq 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i) \tag{1}$$

となる (Leemis [1])．ここで coherent system は，構造関数 ϕ が減少せず，それぞれのコンポーネントが関係しているシステムとする．この制限方法は，並列システムが最高のシステム，直列システムが最悪のシステムという考えの下に考えられているため有用な値を得ることは難しい.

もう一つの方法として対象となるシステムの最小パス集合・最小カット集合を用い, 上下限を求める方法がある．最小パス集合 $P_1, P_2, P_3, \cdots, P_s$ と，最小カット集合 $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k$ を持つ，独立したコンポーネント

で構成される coherent system を ϕ とすると，

$$\prod_{j=1}^{k}[1-\prod_{i\in C_j}(1-p_j)] \le r(\mathbf{p}) \le 1-\prod_{j=1}^{s}[1-\prod_{i\in P_j}p_i] \tag{2}$$

となる (Leemis [1])．この方法は先に紹介した方法 (1) よりも有効に信頼度を制限することができる．それをこれから検証していく．

3　上下限

下記のブリッジ型構造について考える．本研究では計算・比較などを容易にするため，システムを構成するコンポーネントは互いに独立であり，同じ性能（信頼度）を持つと仮定する．そのため，$p = p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ とする．

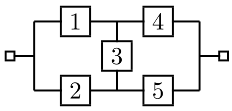

図 1　ブリッジ型構造

3.1　正確な信頼度の算出

2 つの方法を比較するため，実際の信頼度を算出する．

3.1.1　場合分けによる算出

コンポーネント「3」が稼動している状態と停止している状態に場合分けして考える．それぞれの条件付き確率から，

$$\begin{aligned} r(p) &= p[1-(1-p)^2]^2 + (1-p)[1-(1-p^2)^2] \\ &= 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5 \end{aligned}$$

となる (室津, 米澤, 邵 [2])．

3.1.2　最小パス集合を用いた算出

システムの稼動状態を各最小パス集合から成る並列構造として見ることができる．最小パス集合は {1,4}, {2,5}, {1,3,5}, {2,3,4} であるから, 構造関数は,

$$\phi(x) = 1-(1-x_1x_4)(1-x_2x_5)(1-x_1x_3x_5)(1-x_2x_3x_4)$$

となる．展開し, ブール代数で扱っているため ${x_i}^2 = x_i$ を適用し，$p = p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ より，

$$r(p) = 2p^2 + 2p^3 - 5p^4 + 2p^5$$

となる (室津, 米澤, 邵 [2])．

3.1.3　最小カット集合を用いた算出

最小カット集合を並列に配置し，各並列構造を直列につないだ構造を稼動状態と見る．最小カット集合は {1,2}, {4,5}, {1,3,5}, {2,3,4} であるから, 構造関数を,

$$\begin{aligned} \phi(x) =& [1-(1-x_1)(1-x_2)][1-(1-x_4)(1-x_5)]\times \\ & [1-(1-x_1)(1-x_3)(1-x_5)]\times \\ & [1-(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)] \end{aligned}$$

とする (室津, 米澤, 邵 [2])．展開し, 最小パス集合を用いた算出と同様の操作をすると同じ式を導き出せる．

3.1.4　全ての場合からの算出

最も手間がかかる方法ではあるが, 全ての場合を考えて, その中から稼動する状態を抜き出し正確な信頼度を求める方法がある．

3.2　(1) の方法による上下限の算出

(1) の方法で図 1 の信頼度の上下限を求めてみる．コンポーネントの数は 5 個であるので, 当てはめ，展開すると,

$$p^5 \le r(p) \le 1-(1-p)^5$$

を得る．

3.3　(2) の方法による上下限の算出

(2) の方法で図 1 の信頼度の上下限を算出する．$s = k = 4$ であり, 前述の (2) に最小パス集合と最小カット集合を当てはめて展開すると,

$$\begin{aligned} [1-(1-p)^2]^2[1-(1-p)^3]^2 &\le r(p) \\ &\le 1-[1-p^2]^2[1-p^3]^2 \end{aligned}$$

を得る．

3.4　比較

算出した 2 つの上下限と正確な信頼度が，コンポーネントの信頼度 p が 0 から 1 まで 0.001 ずつ上昇した場合の推移を図 2 に示す．

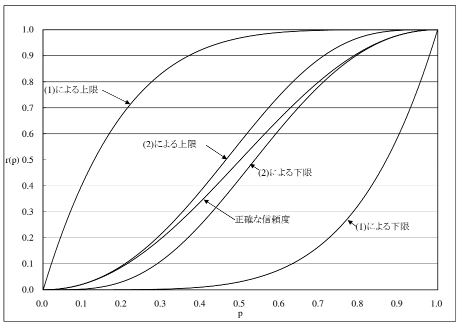

図 2　算出した上下限と正確な信頼度の推移

図 2 から, (2) による上下限の方が (1) による上下限よりも，うまく範囲を絞れていることが分かる．(2) による制限の方が最小パス集合と最小カット集合というシステム構造の要素を考慮に入れたため，より詳しい質の高い制限を行えたということが言える．

4　上下限の性質

最小パス集合・最小カット集合がうまく求まらなかった場合の実際の例を示し, 最小パス集合・最小カット集合の数がどのように上下限に影響を与えるかを述べる．

4.1　上限の性質

上限は求められた最小パス集合が増えるほど値が上がる．また, 含まれる要素の数が少ない最小パスの方が要素の数が多い最小パスよりも上限に与える影響が大きい．

4.2　下限の性質

下限は求められた最小カット集合が増えるほど値が下がる．また, 上限と同じく含まれる要素の数が少ない最小カットの方が要素の多い最小カットよりも下限に大きな影響を与える．

5　近似

精度が高かった (2) の方法による上下限を用いて近似を行う．

図 2 から上下限と正確な信頼度の曲線の関係が分かった．それは,

- 正確な信頼度が上限と下限の間の値を取る
- $p = 0$ の付近では正確な信頼度が上限に近い値を取り, 徐々に上限を離れていき $p = 1$ の付近では下限に近い値を取る

の 2 つである．近似式は上記のことを取り入れ，p が小さい段階では上限の値に近く，p が大きくなるにつれ, 下限に近い値を取るようにする．上限を R_U, 下限を R_L, コンポーネント 1 個の信頼度を p として近似式を,

$$r(p) \fallingdotseq pR_L + (1-p)R_U \tag{3}$$

と設定する．

提案した近似式で図 1 のブリッジ型構造の近似を行う．定めた近似式がどの程度近似できているか判断するため，(2) による信頼度の上下限と近似値，正確な信頼度を図 3 に示す．

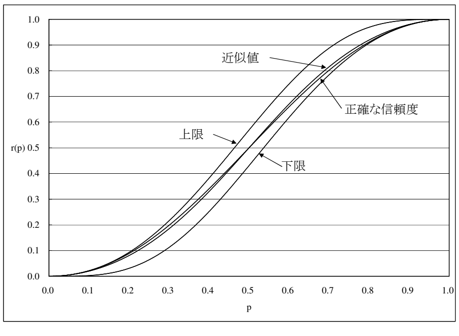

図 3　上下限と近似値，正確な信頼度の推移

誤差は最大で $p = 0.322$ の時の 0.0137 であり，平均誤差は 0.00694 になり，平均して誤差を 0.007 以下に抑え，安定して近似できている．

6　様々なモデルでの近似式の性能

考案した近似式が, どのようなシステムで効果を発揮し, どのシステムで弱いかを説明する．

6.1　近似がうまくいく場合

ブリッジ型システム同様, 最小パス集合・最小カット集合の数が比較的近く上限と下限がバランスよく描かれているシステムの場合, 近似式は質の高い近似を行うことができる．このような状態はコンポーネント同士がバランスよく絡み合う構造に見られる．

6.2　近似が機能しない場合

本研究の近似式は, どんなシステムにおいても通用するような近似式ではなく, 近似の結果が思わしくないシステム構造がある．そのようなシステム構造を状態別に分けて説明する．

6.2.1　正確な信頼度が近似値を上回って推移する場合

近似値が下限の影響を受けて下がる場合は正確な信頼度が近似値を大部分で上回り, 近似の質が低下する場合がある．そのような状態の例として図 4 を示す．

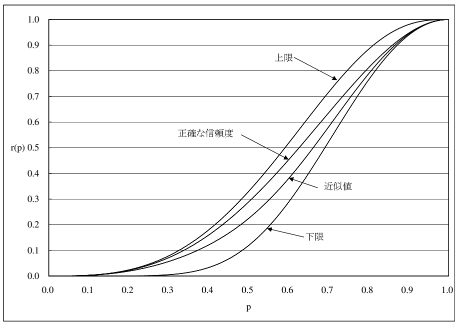

図 4　正確な信頼度が近似値を上回る例

このような状況を引き起こすのは, 最小カット集合の数が最小パス集合よりも多い場合に多い．

また, 正確な信頼度が上限から離れず推移する場合などがあり, それはシステム構造に少ないコンポーネントの稼動だけで全体が稼動するような「抜け道構造」を持つシステムに多い．

6.2.2　正確な信頼度が近似値を下回って推移する場合

近似値が上限の影響を大きく受けて上がる場合や正確な信頼度が下限に近い値を取り続ける場合などは, 近似値が正確な信頼度を大部分で上回りながら推移することになる．図 5 を例として示す．

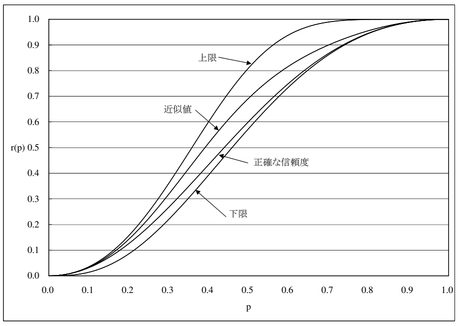

図 5　正確な信頼度が近似値を下回る例

この状態は 2 個の独立したシステム構造が直列的につながっている場合に多い．元々, お互いが持っていた最小パス集合・最小カット集合が最小パスでは乗算, 最小カットでは加算になるため, 最小カット集合よりも最小パス集合が多くなり, 上限と下限のバランスが悪くなり良い近似ができなくなると考えられる．

7 誤差修正

一定の近似を行うことができた各システムの誤差の推移に注目して誤差修正を行う．提案した近似式が一定の近似を行うことができた構造では, 生じた誤差に 1 つの特徴がある．その特徴は「前半はプラスになり, 後半でマイナスに転じ 0 に収束する」というものである．この特徴を利用し, いくつかのサンプルを集め, 生じる誤差の平均を取りその曲線を誤差修正曲線として誤差を修正する．誤差修正は, 誤差修正曲線の値を近似値に足し合わせ誤差を抑えるという方法を取る．

近似式が機能する構造を 15 通り集める (Grosh [5], Lewis [6])．それから作成した誤差修正曲線を図 6 に示す．濃い曲線が誤差修正曲線, 薄い曲線はサンプルである．

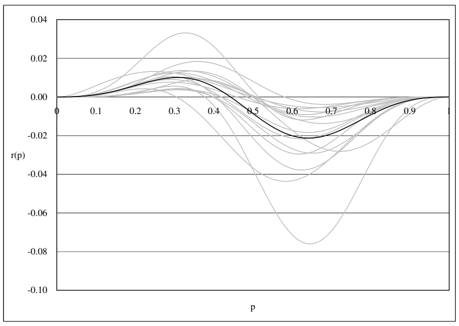

図 6　誤差修正曲線

図 6 の誤差修正曲線を使って実際にあるシステム 4 通りで誤差修正を行った結果を図 7 に示す．濃い曲線は修正後, 薄い曲線は修正前の誤差である．

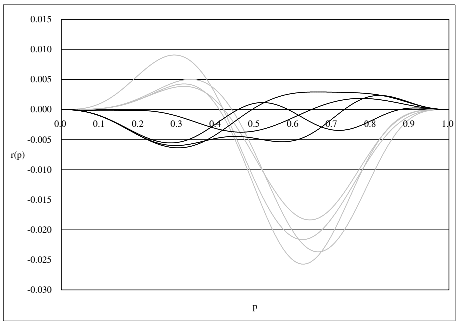

図 7　修正結果

図 7 からも分かる通り, 近似式が機能しているシステム構造においては誤差修正曲線も比較的機能して誤差を減少させることに成功している．最も誤差を修正できていたシステムでは, 修正前の誤差が 0.00780 であるのに対し, 修正後は 0.00130 になり修正することによって誤差を 1/5 以下に抑えることができた．

しかし, ここで作成した誤差修正曲線は近似式同様どのシステムにも対応できるわけでないことに注意しなくてはならない．

8 おわりに

本研究では, 2 つの上下限の比較をして, さらにその信頼度の上下限という情報から近似式を設定し, 正確な信頼度にどの程度迫ることができるか研究してきた．また, それに関連して扱った上下限の性質や, 設定した近似式がどのようなシステムに対して機能するかにも触れた．近似式は, 上限と下限, コンポーネントの信頼度という 3 個の要素から立てた非常に簡単な式であった．その式からある程度の近似を行うことができたのは大きな収穫であった．

今後の課題としては,

- 大規模かつ複雑なシステムでの検証
- 様々な性能で互いの性能に影響を及ぼし合うコンポーネントで構成されるシステムでの検証

がある．本研究が扱った近似は大規模かつ複雑なシステムという正確な信頼度を求めることが困難なモデルにおいて, 正確な信頼度より比較的求めやすい上下限を用いて, ある程度の値を出すことが目的であるため, 実際の場面で近似式を使用するには, 上記の検証を行う必要がある．

謝辞

本研究を進めるに当たって, 熱心なご指導と多大なご支援をしてくださった尾崎俊治教授をはじめ, アドバイスをしてくださった教授の方々, 研究室の仲間に深く感謝致します．

参考文献

[1] L.M. Leemis, “Reliability : Probabilistic Models and Statistical Methods”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1995.

[2] 室津義定, 米澤政昭, 邵暁文, “システム信頼性工学”, 共立出版株式会社, 1996.

[3] 猪瀬博, “コンピュータ・システムの高信頼化”, 情報処理学会, 1977.

[4] T. Aven, U. Jensen, “Stochastic Models in Reliability”, Springer-Verlag, New York, 1999.

[5] D.L. Grosh, “A Primer of Reliability Theory”, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[6] E.E. Lewis, “Introduction to Reliability Engineering”, John Wiley & Sons, New York, 1987.