動的数学ソフトウェアを利用した数学の授業構想
—関数のグラフを中心として—

2020SS089 吉原侑希
指導教員: 佐々木 克巳

1 はじめに

近年教育界においても ICT が注目されてきている. 例えば, 文部科学省[2]にも, ICT 活用の必要性についての記述がある. 私は, この数学教育における ICT 活用の中でも, ICT と実際の授業との関りに興味があり本研究を行うことにした. 本研究では, ICT 活用の例として, 動的数学ソフトウェア GeoGebra の利用を考える.

本研究の目的は, 動的数学ソフトウェア GeoGebra をもとにして, よりよ い数学の授業構想について考察することである. 具体的には, GeoGebra を用いたよりよい授業構想を考察し, それをもとに ICT 教材を用いないで同様の目標を達成する問題を紹介する.

授業構想の対象としたテーマは 2 次関数と 3 次関数のグラフであり, 本稿では, このうちの 3 次関数のグラフのテーマを扱う. 次節でその授業目標を示し, 3節で本研究で用いる動的数学ソフトウェア GeoGebra の詳細を述べる. 4 節で, GeoGebra を用いた授業構想を示し, 5 節で考察を行う. 最後に 6 節で ICT 教材を用いない問題を紹介する.

2 授業目標

この節では, 本稿で扱う 3 次関数のグラフの授業構想の目標を示す. その目標は次の 2 つである.

目標 1. 3 次関数$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$のグラフと係数a, b, c, dの関係を理解する.

目標 2. 3 次関数$y = (x - p)^3 + q(x - p) + r$のグラフと係数$p, q, r$の関係を理解する.

目標 1 における, 理解すべき具体的な関係は, 次の(G1)~(G4)のとおり, 目標 2 においては次の(G5)~(G7)のとおりである.

(G1) aとの関係. $a > 0$のとき, グラフは有限範囲を除いて右上がり, $a < 0$のとき, グラフは有限範囲を除いて右下がりである.

(G2) bとの関係. bの値が増加するにつれて, グラフの変曲点は曲線$y = -2ax^3 + cx + d$上を移動する.

(G3) cとの関係. cの値が増加するにつれて, グラフ上の各点における接線の傾きが増加する.

(G4) dとの関係. dの値が増加するにつれて, グラフ全体がy軸の正の方向に移動する.

(G5) p, rとの関係. このグラフの変曲点の座標が(p, r)である.

(G6) qとの関係. qの値が増加するにつれて, 変曲点における接線の傾きが増加する.

(G7) rとの関係. rの値が増加するにつれて, グラフは形を保ったままy軸の正の方向に移動する.

3 動的数学ソフトウェア GeoGebra

本研究で用いるICT教材は, 動的数学ソフトGeoGebra である. そのソフトウェアの,

・3 次関数$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$の係数a, b, c, dの値に応じて, そのグラフを変化させる機能

・3 次関数$y = (x - p)^3 + q(x - p) + r$の係数$p, q, r$の値に応じて, そのグラフを変化させる機能

を用いる. 実際に前者の機能を用いた例を図 1 に示す.

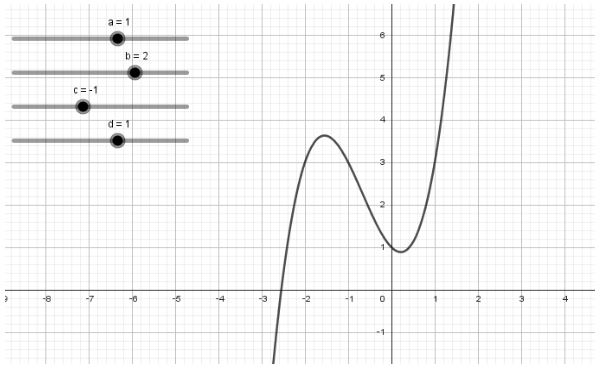

図 1:GeoGebra の機能を用いてかいた 3 次関数のグラフ

図 1 では, $(a, b, c, d) = (1, 2, -1, 1)$の場合の 3 次関数のグラフが表示されており, 左にある「$a = 1$」の近くの●を直線に沿ってドラッグすることで, aの値の変化に応じたグラフの変化を見ることができる. b, c, dの値についても同様である.

4 GeoGebra を用いた授業構想

本研究は, 目標 1 と目標 2 に対して 3 節の GeoGebra の機能を用いた授業構想を考察した. この節では, このうちの目標 1 に対する授業構想について述べる.

その授業構想は,「目標 1 の 3 次関数のグラフと係数の関係を調べよう」という発問から始めて, 次の 3 つのステップで構成する.

ステップ 1: GeoGebra を用いて, 発問の関係((G1)~(G4))を調べる.

ステップ 2:(G3)のグラフの変化を数理的に根拠づける

ステップ 3:(G2)の変曲点の軌跡を考察する.

以下, 各ステップについて述べる.

ステップ 1 の調査で想定する結果は次のとおりである. (G1), (G4)は容易に気づくことができ, (G4)の数理的根拠も容易に与えることができるだろう. (G1)の数理的根拠も$x \to \pm\infty$のときの関数の値に注目させることで与えられると考える. (G2)は, 必要に応じて, 変曲点の動きに注目させる誘導をして, その動きが放物線に沿っていそうだと予想できるまでを想定する. (G3)は, グラフの変化を, 各生徒がそれぞれの形で表現するところまでを想定する.

ステップ 2 では, cの変化に伴うグラフの変化を(G3)の形で記述し, その証明を与える. ステップ 1 で得た, グラフの変化の表現をもとに, その変化がグラフ上の点の接線の傾きで表現できそうだという誘導をして, そこから微分して

みようという意見を引き出す．微分することで，次のように(G3)を導くことができる．

(G3)の証明．$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$とおく．すると，グラフ上の点$(x,f(x))$における接線の傾きは，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$であり，cが増加すると，その傾きも増加することがわかる．

ステップ 3 では，変曲点の軌跡の考察により．(G2)を導く．その方法は 2 つある．1 つは，変曲点の軌跡をそのまま求める方法である．具体的には，次の(G2)の証明のとおりである．

(G2)の証明．変曲点(x,y)は，

$(x,y)=(-b/(3a),(2b^3-9abc+27a^2d)/27a^2)$ (E1)

と求められる．ここからbを消去して，$y=-2ax^3+cx+d$を得る．逆に，放物線$y=-2ax^3+cx+d$上の点$\mathrm{P}(p,-2ap^3+cp+d)$に対して，$b=-3ap$とおくと，点 P の座標は，(E1)の右辺の$b$を$-3ap$に置き換えた式で表現できて，P は 3 次関数$y=ax^3+bx^2+cx+d$のグラフの変曲点とわかる．

もう 1 つは，高等学校数学Ⅱの軌跡の考え方を学んでいない生徒を想定した方法で，軌跡の方程式が単純になるようa,b,c,dを特殊化した 3 次関数に対して，軌跡を求める方法である．具体的な特殊化は

$$(a,b,c,d)=(-\frac{1}{3},b',\frac{1}{3}b'^2,0)$$

の場合で，特殊化した結果は以下のとおりである．証明は(G2)の証明と同様にできる．

特殊化された(G2)．b'の値が増加するにつれて，3 次関数$y=-\frac{1}{3}x^3+b'x^2+\frac{1}{3}b'^2x$のグラフの頂点は放物線$y=x^3$上を移動する．

5 考察

本研究は，目標 1 と目標 2 に対する授業構想を考察した．本稿では，このうちの 4 節で述べた目標 1 に対する授業構想を扱い，この節では，その考察の概要を述べる．

目標 1 は(G1)~(G4)までの理解すべき関係がある．(G1), (G4)に関しては，ICT 教材なども用いながら学習することで比較的容易に気づくことができる内容であると感じる．(G2), (G3)に関しては，(G1), (G4)と比較するとより発展的な内容になるため 4 節で述べたとおり，ICT 教材を用いて証明の動機づけを作り，実際に証明してみることでより深く理解することができる内容ではないかと感じる．

6 ICT 教材を用いない問題

この節では，(G5)~(G7)の関係を，ICT 教材を用いないで理解する問題を紹介する．2 次関数のグラフについては，令和 4 年度大学入試共通テスト本試験「数学Ⅰ・数学 A」([1])の問題に，$y=x^2+qx-6$のグラフが$q=1$のときのグラフから，さらに 1 を加えた$q=2$のときのグラフに移動する様子を，選択肢から選択させる問題があり，もとの 2 次関数を標準形に変形することで，ICT 教材を用いずに解くことができる．ここで紹介する問題は，この問題の 2 次関数を 3 次関数に置き換えて作成した問題である．

具体的には，目標 2 の 3 次関数に対し，p,q,rのそれぞれに 1 を加えたときの移動の様子を問う問題を作成した．[1]の問題と同様に，(G5), (G6), (G7)を知っている生徒を想定している．本稿では，このうちのpの値に注目した問題を挙げる．

問題．3 次関数$y=(x-p)^3+q(x-p)+r$のグラフを考える．$(p,q,r)=(1,1,1)$のときのグラフを太線で，pの値を 1 から増加させたときのグラフを細線でそれぞれ表す．このとき細線のグラフとして正しいものは図 2 のb~eのうちどのグラフであるか．

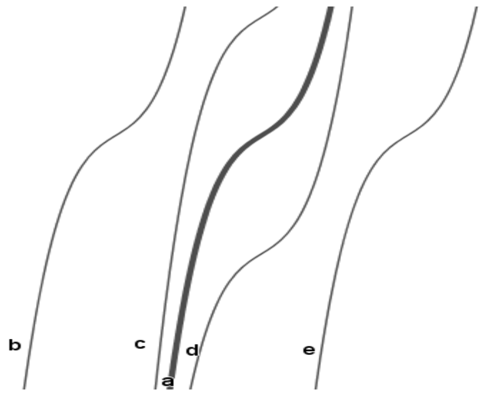

図 2　pの値に注目した問題

解．eのグラフ

解の解説．(G5)の関係より，このグラフの変曲点の座標は(p,r)である．つまり，pの値を増加させると変曲点のx座標は増加するが，y座標は不変であることがわかる．cとdのグラフはaのグラフと見比べて，変曲点のy座標が変化しているので不適である．bのグラフは変曲点のx座標が減少しているので不適である．eのグラフは変曲点のx座標が増加しているので適切であると言える．よって，正しい答えはeのグラフになる．

7 おわりに

本研究を通して，GeoGebra などの ICT 教材のよさを見出すことができた．しかし，方程式を導くところには ICT は不要であるなど，ICT 教材のみにとらわれて授業を構成するのではなく，従来のやり方に加えて ICT 教材をどのように取り入れていくのかが重要であると感じた．本研究で学んだことを実際の授業構想にも取り入れていきたいと思う．

参考文献

[1] 独立行政法人大学入試センター，https://www.dnc. ac.jp/kyotsu/kakomondai/r4/r4_honshiken_mondai.html，(参照 2023-10-19)

[2] 文部科学省，「算数・数学科の指導における ICT の活用について」，https://www.mext.go.jp/content/20200914-mxt_jogai01-000009772_001.pdf，(参照 2023-10-01)