求められる能力の視点からみる「数学Ⅱ」の指導法

2020SS006 春田　昌彦
指導教員:佐々木　克巳

1　はじめに

　本研究の目的は，数学科の科目「数学Ⅱ」におけるいくつかの話題に対して，学習指導要領([1])が求める能力に注目した指導法を考察することである．対象とした話題は

・二項定理
・解と係数の関係

の 2 つである．[1]が求める能力は，具体的には，

(A0)「数学科の目標」に記載された能力
(A1)「数学Ⅱ」における,「二項定理」に関連する部分に記載された能力
(A2)「数学Ⅱ」における,「解と係数の関係」に関連する部分に記載された能力

の 3 種類を考える．そして，2 つの各話題を教育するいくつかの場面において，2 種類の能力（(A0)と(A1)，または，(A0)と(A2)）がどのように活かされるかを考察する．

　本稿では「解と係数の関係」の詳細を述べる．この話題で対象とする能力は 5 つあり，

　(A0)の能力が次の(A01)〜(A03)の 3 つ，(A2)の能力が次の(A21),(A22)の 2 つである．

(A01) 論理的に考察する能力
(A02) 統合的・発展的に考察する能力
(A03) 問題解決の過程を振り返って考察を深めたり，評価・改善したりする能力
(A21)二次方程式の解の公式を用いて和及び積を計算して解と係数の関係を導かせたりする能力
(A22)いろいろな二次方程式について，2 つの解についての対称式の値を求める活動などを通して，解と係数の関係のよさを認識する能力

2　解と係数の関係

　本研究では，「解と係数の関係」に対して，1 節で述べた 5 つの能力に注目した指導法を考察する．より具体的には,「解と係数の関係」を教育する 3 つの場面：

・解と係数の関係の導入
・解の符号を用いる問題への応用
・放物線と直線で囲まれた面積を求める問題への応用

において，5 つの能力がどのように活かされるか考察した．この節では，その 3 つの場面のうち最初の 2 つの詳細を，それぞれ次の 2.1 節と 2.2 節で述べる．

2.1 解と係数の関係の導入

　この節では，解と係数の関係の 2 つの導入例を示し，5 つの能力がどのように活かせるかを考察する．

導入例 1．放物線の軸の方程式を求める過程を利用した導入

　まず，既習内容である次の問題を解く．

問題 2.1.1 放物線$y=x^2+3x-3$の軸の方程式を求めよ．

解．軸の方程式を$x=p$とおく，pは二次方程式$x^2+3x-3=0$ の2解の平均値である．2解は解の公式を用いて，$x=\frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$ と求められる．この平均をとると，

$$p=\left(\frac{-3+\sqrt{21}}{2}+\frac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$$

だから，求める軸の方程式は$x=-\frac{3}{2}$ である．

　ここで，解にはルートが現れるが，軸の方程式にはルートが現れないことに気づかせ，どんな場合でもそうなるかを投げかけて，上の解の過程から，そうでありそうだという意見を引き出す．そして，次のように，一般の二次方程式$y=ax^2+bx+c$ の2解の和と係数の関係をまとめる．

性質 2.1.2. 二次方程式$ax^2+bx+c=0$ の2解をα,βとすると，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ である．

証明．解の公式を用いて，α,β を求めてその和をとる．

　さらに，上の証明過程をみて，和の他にもルートが現れないものはないか，と投げかけ，必要に応じて，2 解の分子のルートの符号が異符号であることや和と差の積の公式$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$ について言及し，2 解の積にもルートがないことに気づかせる．そして，解の積と係数の関係も，和の場合と同様にまとめる．

導入例 2. 因数定理と係数比較を用いた導入

　まず，既習内容である次の問題を解く．

問題 2.1.3. 2 解が$x=1\pm\sqrt{5}$ であるような二次方程式$x^2+bx+c=0$ の係数b,c の値を求めよ．

解．2 解が$x=1\pm\sqrt{5}$ であるので因数定理より，二次方程式の左辺は次のよう因数分解できる．

$$x^2+bx+c=\{x-(1+\sqrt{5})\}\{x-(1-\sqrt{5})\} \quad \text{(E1)}$$

右辺を展開すると,

$$x^2-\{(1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})\}x+(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})$$
$$=x^2-2x-4$$

これと(E1)の係数とを比較して，$b=-2,c=-4$ である．

ここで，(E1)の右辺(つまり，因数定理を用いて，式を因数分解した結果)を展開すると，2 解の和と積が現れ，(E1)で現れていた$\sqrt{5}$ は，計算をすると，ルートのない整数値になっていることに気づかせる．さらに，和と積の計算過程を振り返り，問題 2.1.3 以外の一般の解$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$の場合も，和と積の計算結果はルートなしで表現できることを予想させる．そして，次の形で，その証明を与えるとともに，解と係数の関係とまとめる．

性質 2.1.4. 二次方程式$ax^2+bx+c=0$の2解をα,βとすると，$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ である．

証明. 二次方程式の 2 解をα,β とし，$(x-\propto)(x-\beta)$ の展開式ともとの二次方程式の係数の比較をする．

解と係数の関係の 2 つの導入例において，5 つの能力は表 2.1 のように活かされると考える．

表 2.1：導入 1 と導入 2 の能力

導入例 1	導入例 2
・二次方程式の 2 つの解を求め，解に出てくるルートの符号が異なることに気付き，2 つの解に加法を使う部分で(A03)の能力 ・(A21)の記述のとおりに導入されているので，(A21)の能力 ・解と係数の関係を知っていれば，(関数の係数にルートがなければ)軸の方程式を，計算過程も含めてルートなしで求められる，というよさを認識できるので(A22)の能力	・因数定理と係数比較を組み合わせ順序立てて論理的に考察する部分が(A02) と(A03) の能力

表 2.1 より，導入例 1 には(A2)の 2 つの能力がどちらも活かされるのに対し，導入例 2 では(A0)の能力が主に活かされている．このことから，学習指導要領に沿った導入方法は導入 1 の方が適切と考える．ただし，導入 2 も(A0)の能力が活かされるので，状況に応じて利用できるだろう．

2.2 解の符号を用いる問題への応用

この節では，解の符号を用いる1つの問題に対し，解と係数の関係を用いる解と用いない解を示し 5 つの能力がどのように活かせるかを考察する．

問題 2.2.1. 二次方程式$x^2+2mx+m+2=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき，定数mの値の範囲を求めよ．

解 1（解と係数の関係を用いない解）. 二次方程式の左辺を$f(x)$ ，判別式をD とおくと，異なる 2 つの正の解をもつためには，次の 3 つの条件をすべて満たせばよい．

(C1)　$D>0$

(C2)　放物線$y=f(x)$ の軸が$x>0$ の範囲にある

(C3)　$f(0)>0$

3 つの各条件に対して，それを満たすm の範囲を求めて，共通部分をとると，$-2<m<-1$ である．

解 2（解と係数の関係を用いる解）. 2 次方程式の 2 つの解を$\propto,\beta$ とし，判別式をDとする．異なる 2 つの正の解をもつためには，次の 2 つをすべて満たせばよい．

(C4)　$D>0$

(C5)　$\propto+\beta>0$かつ$\alpha\beta>0$

(C4)を満たすm の範囲は，解 1 と同様に求められる．
(C5)を満たすm の範囲は，解と係数の関係より求められる．それらの，共通部分を求めて，$-2<m<-1$ を得る．

解の符号を用いる問題の 2 つの解において，5 つの能力は表 2.2 のように活かされると考える．

表 2.2：解 1 と解 2 の能力

解 1	解 2
・二次関数のグラフと，解との関係を統合的に考察する部分で(A02)の能力 ・二次方程式が満たす条件の符号を考察することで，2 つの解が負のときや 2 つの解が異符号のときでも同様に考えられると評価できるのが(A03)の能力	・二次方程式が満たす条件を 2 つ挙げた部分で，判別式と，解と係数の関係を統合的に考察する部分が(A02)の能力 ・二次方程式が満たす条件の符号を考察することで，2 つの解が負のときや 2 つの解が異符号のときでも同様に考えられると評価できるのが(A03)の能力 ・2 解の符号の条件を対称式の符号の条件に置き換えて計算していることから(A22)の能力

表 2.2 の解 1 には，(A2)の能力は現れない．解 1 は解と係数の関係を用いないので，当然であろう．代わりにグラフと解との関係が用いられている．一方，解 2 では，対称式の性質をうまく使って，グラフとの関係を経由せずに問題の解を導いている．この比較により，(A22)の能力をより活かす授業を展開できると考える．

3　おわりに

本研究では，数学科の科目「数学Ⅱ」で求められる「能力」の視点からさまざまな考察を行った．それぞれの問題が学習指導要領のどの部分に対応しているのかを理解し，どちらの導入や解法がより学習指導要領に沿っているか考えた．本研究から得た知識をもとに，適切に授業を展開していきたい．

参考文献

[1]　文部科学省,『高等学校学習指導要領（平成 30 年告示）解説　数学編　理数編』, 学校図書，東京，2019