

# ウォリスの代数学教科書

2016SS012 平塚麗奈

指導教員：小藤俊幸

## 1 はじめに

17世紀ヨーロッパでは、急速的な数学の発展が見られた。このころ確立された印刷技術などにより新しい考え方が急速に広まるとともに、数学者間の交流も深まり学問の進展が盛んになったのである。そんな中、1685年に英語によって書かれたジョン・ウォリスの『代数学』が出版された。これまで多くの数学者の著作がラテン語によって出版されていた中で、ウォリスの『代数学』は数学の大衆化が進んでいたことを示すものでもある。

本研究では、ウォリスの『代数学』の内容をまとめ、現在の数学と17世紀ヨーロッパの数学を比較することで、数学教育の原点を知り、凄まじい発展を遂げた17世紀ヨーロッパの数学の背景を考察する。

## 2 『代数学』の評価

ウォリスは多くの著作の中でも、『代数学』に特に自信を持っていたようである。基本的に肖像画の補助的なものとして描かれるものは、その人物に相応しいものであると考えられるが、ウォリスの肖像画には彼とともにある図が描かれている。この図は、『代数学』に記載されている双曲線の図版である [2]。

しかし、ウォリスは数学的ナショナリズムな主張を述べており、歴史的に偏りが見られる『代数学』は、今日では認められない主張も多くなってしまったように感じられる。

## 3 構成内容

ウォリスの『代数学』は英語版とラテン語版がある。本研究で参考にする英語版の本文は100章で成立しており、その内容は以下のように9部に分けることができる。

- 1-2 章 アルジェブラの性質・名前, 古代ギリシャとアラビアの代数学・数学者
- 3-12 章 数字の形, アルキメデスから17世紀までの数体系, 少数, 分数, 比, 対数, 直径と円周の比
- 13-14章 ピサのレオナルド(フィボナッチ), パチョーリ
- カルダーノ, ヴィエタなどの代数学者について
- 15-29章 オートレッドの代数(分数, 割合, 等差数列と等比数列, 無理数, 二次方程式など)
- 30-56章 ハリオットの代数(二次方程式, 三次方程式など) デカルトによる二次方程式
- 57-72章 ペルの代数
- 73-97章 ウォリスとニュートンの『普遍算術』(求積法, ニュートン法, 無限級数など)
- 98-99章 ブラウンカーとウォリスの数論
- 100 章 結論

## 4 二次方程式

ウォリスの『代数学』28章にて、オートレッドによる二次方程式の解についての論考が書かれている。これは、今日使われている解の公式とは大きく異なるものであった。ここではその内容をまとめ、現在との違いを探っていく。

### 4.1 二次方程式の負の解について

まず、二次方程式を以下のように3つの形式に分ける。

$$1 \quad AE = BR - R^2$$

$$2 \quad R^2 - BR = AE$$

$$3 \quad R^2 + BR = AE$$

これは  $R$  を未知数とした二次方程式である。ここで、解を  $A, E$  とし、1の  $B$  に解の和を、2と3の  $B$  に解の差を代入してみると、

$$1' \quad -R^2 + (A + E)R - AE = 0$$

$$2' \quad R^2 - (A - E)R - AE = 0$$

$$3' \quad R^2 + (A - E)R - AE = 0$$

これらの3つの形式は、二次方程式の2つの解を  $A, E$  としたときに、1は解がどちらも正になる場合、2と3は正と負の解が1つずつになる場合で区別している。

しかし、オートレッドは負の解を無意味なものとして考えていたとあるため、ここからは負の解を考えないものとする。

### 4.2 二次方程式の解の求め方

ここからは未知数  $R$  の求め方であるが、まず1の形式から考える。解の和を  $Z = A + E$  とし、解の差を  $X = A - E$  とすると  $Z^2 - X^2 = 4AE$  よって、 $\frac{1}{2}X = \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - AE}$  また、解  $A, E$  のそれぞれの値を求める。

$$Z + X = (A + E) + (A - E) = 2A \text{ より } A = \frac{1}{2}Z + \frac{1}{2}X$$

$$Z - X = (A + E) - (A - E) = 2E \text{ より } E = \frac{1}{2}Z - \frac{1}{2}X$$

したがって、1の形式の  $R$  は、

$$R = A \text{ のとき, } R = A = \frac{1}{2}Z + \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - AE}$$

$$R = E \text{ のとき, } R = E = \frac{1}{2}Z - \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - AE}$$

$$\text{よって, } R = \frac{1}{2}Z \pm \sqrt{\frac{1}{4}Z^2 - AE}$$

$$\text{同様に, 2の形式では, } R = A = \sqrt{\frac{1}{4}X^2 + AE} + \frac{1}{2}X$$

$$3 \text{ の形式では, } R = E = \sqrt{\frac{1}{4}X^2 + AE} - \frac{1}{2}X$$

よって、3つの形式すべての解  $R$  を求める公式を導き出すことができた。

## 5 場合の数

場合の数は現在の数学でも問題として扱われることが多い分野である。現在の授業として扱っている場合の数と、どのような違いがあったのかを比較し探っていく。

## 5.1 組合せ・順列

組合せ・順列に関して公式は書かれておらず、すべての場合をひと通り計算して答えが求められている。順列に関しては、重複順列に関する内容は書かれていたが、円順列や一部取り出して並べるような順列に関してはなかった。

さらに、順列では文字列が大きくなるほど並べ方の総数は膨大な数になるという説明を、実際に具体的な話を用いていた。

例えば、ホストが7人のゲストを飽きないよう毎日異なる席順にし、楽しませると約束したとすると、すべての並び方を完了させるまでに約14年間かかるというものである。

7人を異なる順序で並べると、 $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5040$ 通り。14年は $365 \times 14 = 5110$ より5110日。ただし、うるう年があるので正確には14年から73日もしくは74日を引いた日数であるとしている。たった7人のゲストを異なる席順に並べて招待するだけで、約14年もの時間がかかってしまうのだというこの説明は、どれほど膨大な数なのかわかりやすく説明されている。

## 5.2 約数の個数

組合せ・順列の後に、約数の個数の求め方が書かれている。ただし、約数は正であるという前提で考える。

約数の個数を求めるにあたって、素数の約数の性質を利用する。素数の約数の個数は必ず2つである。さらに、素数を累乗した約数の個数は指数+1となる。この性質を利用して、異なる素数をかけてつくった数の約数の個数を求めることができる。

例えば、それぞれ異なる2つの素数 $a, b$ からなる $a^3b^2$ の約数の個数を求める。 $a^3$ の約数の個数は4つ、 $b^2$ の約数の個数は3つなので、それぞれの約数の組合せを求め、 $a^3b^2$ の約数の個数は12とわかる。また、これは積の法則( $4 \times 3 = 12$ )でも求められる。

ここまでのことを利用すると、逆に約数の個数から数を求めることができる。例題として、100個の約数を持つ最小の数を求めよという問題が提示されている。

以下では、この問題の解答をまとめる。

100は次のように9つの形で表現できる。 $100 = 50 \times 2 = 25 \times 4 = 25 \times 2 \times 2 = 20 \times 5 = 10 \times 10 = 10 \times 5 \times 2 = 5 \times 5 \times 4 = 5 \times 5 \times 2 \times 2$ 。よって、素数を使い次のように表現できる。

$a^{99}, a^{49}b, a^{24}b^3, a^{24}bc, a^{19}b^4, a^9b^9, a^9b^4c, a^4b^4c^3, a^4b^4cd$   
(ただし、 $a, b, c, d$ はそれぞれ異なる素数)

よってこの中での最小数は、 $a^4b^4cd = 2^4 \times 3^4 \times 5 \times 7 = 45360$ 。したがって、100個の約数を持つ最小の数は45360である。

## 6 考察

二次方程式の解についてまとめてわかったことは、17世紀のヨーロッパでは負の数の概念がまだ広く認められてい

なかったということである。負の概念がなかったヨーロッパでは、負の数は無意味なものであるという考えを持っていた数学者は多くいたようである。

しかし、ウォリスはオートレッドの二次方程式の解について、もし負の解を認めた場合の形式を補足として書いている。また、32章のハリオットによる二次方程式の解では、負の解も含めて考えた解の公式が考えられている。負の数という概念を積極的に受け入れていこうとしていた時代のように感じた。

場合の数についてはまだ初歩的な部分に触れ始めたところのようである。1867年に出版されたホイットワースの著作にてようやく、現在の高校の教科書のような公式の説明や円順列などの例題が出題されている[5]。

## 7 おわりに

17世紀ヨーロッパの数学と現在の日本の数学は、想像していたよりも似ているところが多い。しかし、順列でホストと7人のゲストの問題があったように、現在の日本の教科書なら順列は数が大きくなるほど総数は膨大になるとだけ書いてあるであろうところが、『代数学』では読んだだけでどれほど膨大な数になるのか想像しやすい。

現在の日本の数学の教科書は、必要なところだけ簡潔にわかりやすくまとめられているため、理解しやすく読みやすいが興味をひくという点においては、『代数学』に劣っているのではないかと感じた。

17世紀ヨーロッパの数学は、発展途上でありようやく大衆化が進み始めた時代である。未完成であるからこそ、その時代にしかなかった考え方がたくさんあった。そのため、すべてのものが今に残っているわけではないが、残らなかったものも今の数学にとって必要なものであったのだと考える。

## 参考文献

- [1] Jhon Wallis: 『A Treatise of Algebra, both Historical and Practical. Shewing, The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time, and by what Steps it hath attained to the Height at which now it is』. Richard Davis, Oxford, 1685.
- [2] 三浦伸夫: 「歴史から見る数学・数学史から見る歴史/最初の代数学史の著者ウォリス」. 現代数学, 第51巻第4号通巻616号(2018).
- [3] 大矢雅則ほか17名: 「新編 数学A」. 数研出版株式会社, 東京, 2011.
- [4] 小藤俊幸: 「ヨーロッパの数学教育における負数の受容」. 南山大学紀要『アカデミア』理工学編, 第19号(2019)
- [5] 小藤俊幸: 「「場合の数」の数学教育史」. 日本数学教育史学会研究会発表資料(東京学芸大学), 2019.