

二輪型倒立振子におけるコントローラのロバスト性能の評価

2014SC088 渡部 陽 2016SC071 大町 徳寛

指導教員：陳 幹

1 はじめに

倒立振子は非線形性をもつ不安定な制御対象であるため新しい制御理論を実証するための実験装置として用いられてきた。近年ではセグウェイに代表される二輪型ロボットの開発が盛んに行われている。先に述べたセグウェイは人が搭乗した上で二輪型倒立振子を制御することが前提となる。二輪型倒立振子に物が積まれる場合車体の重量や重心の位置といったパラメータが変動する。また路面の状況により数理モデルと制御対象との間に想定していない誤差があるとき数理モデルに基づいた制御方法では二輪型倒立振子の安定性を保証することができない可能性がある。本研究では倒立振子が輸送ロボットであると想定して二輪型倒立振子を用いてコントローラのロバスト性能を評価する。

2 制御対象とモデリング



図1 Balboa32U4

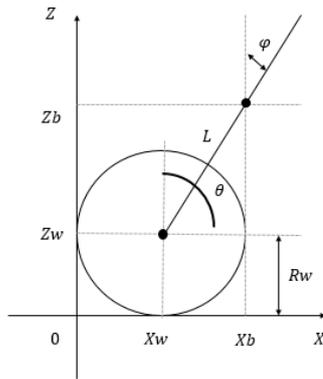


図2 Balboa32U4 の二次元平面図

本研究でシミュレーション対象とする Pololu 社の Balboa32U4 の概形を図1に示す。制御対象の二次元平面図図2より、車輪の回転角度を θ 、車体の傾斜角度を ϕ 、車輪の重心の位置を $(X_w, Z_w) = (Rw\theta, Rw)$ 、車体の重心の位置を $(X_b, Z_b) = (X_w + L\sin(\phi), Z_w + L\cos(\phi))$ とする。モデリングを行うにあたって求めた物理パラメータを以下の表1に示す。図1の画像と測定の難しい値は文献[1]から拝借した。

表1 パラメーター一覧

重力加速度	$g = 9.81$	[m/s ²]
車体の質量	$M_b = 0.302$	[kg]
車輪の質量	$M_w = 0.038$	[kg]
車輪の半径	$R_w = 0.04$	[m]
車体の慣性モーメント	$J_b = 0.000229712$	[kgm ²]
車輪の慣性モーメント	$J_w = 0.000023$	[kgm ²]
モータの慣性モーメント	$J_m = 0.00000002$	[kgm ²]
車体の重心と車輪の中心の距離	$L = 0.0142$	[m]
モータのトルク定数	$K_t = 0.003382287$	[Nm/A]
モータの逆起電力定数	$K_b = 0.003067344$	[Vs/rad]
モータの抵抗	$R_m = 4$	[Ω]
車輪とモータとのギア比	$G_r = 110.103$	

並進運動のエネルギー T_1 、回転運動のエネルギー T_2 、重力のポテンシャルエネルギー U とし、ラグランジュの運動方程式を用いて以下の式から一般化力 F_θ, F_ϕ を求める。文献[2],[3]を参照した。

$$T_1 = \frac{1}{2}M_b(\dot{X}_b^2 + \dot{Z}_b^2) + \frac{1}{2}M_w(\dot{X}_w^2 + \dot{Z}_w^2) \quad (1)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}J_b\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}J_m G_r^2(\dot{\phi} - \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J_w\dot{\theta}^2 \quad (2)$$

$$U = M_b g Z_b + M_w g Z_w \quad (3)$$

$$\mathcal{L} = (T_1 + T_2) - U \quad (4)$$

上記より求めた F_θ, F_ϕ をマクローリン展開により非線形項を近似する。

また、モーターから与えられる一般化力 F_θ, F_ϕ も算出する。得られた一般化力を基に状態空間表現を求める。

状態変数 $x = [\theta \ \phi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi}]^T$ 、入力 $u(t) = v$ とし、状態空間表現を以下の式のように表す。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5)$$

3 最適制御

求めた倒立振子ロボットのモデルの二次安定条件を考え、最適制御を行う LMI 条件を導出する。

システム式(5)を安定させる状態フィードバックゲインを K とし以下の式を使用する。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) = Kx(t) \end{cases} \quad (6)$$

重み行列 $R \succeq 0, Q \succeq 0$ とし、以下の評価関数

$$J = \int_0^\infty (x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)) dt \quad (7)$$

を最小にする入力 $u(t)$ を求める最適制御問題を [4],[5][6]を参考に解きフィードバックゲイン K を求めた。

4 ディスクリプタ表現

車体の重量の変化へのロバスト性を保証する制御器を設計する条件としてシステムの $A(\rho)$ 及び $B(\rho)$ が ρ に関して線形な行列値関数である必要がある。

システム (5) の行列 A の要素 E^{-1} には変動パラメータの積の項が現れ線形でない。

この問題に対しシステムの線形性を保証する方法として [7] を参照し、ディスクリプタ表現を用いる。

システムの状態空間表現を (8) とする。

$$E_0 \dot{x}(t) = A_0 x(t) + B_0 u(t) \quad (8)$$

$$E_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} A_0 = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -G & -F \end{bmatrix} B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix}$$

ディスクリプタ変数を $x_d(t) = [\theta \ \phi \ \dot{\theta} \ \dot{\phi} \ \ddot{\theta} \ \ddot{\phi}]^T$ として式 (8) のディスクリプタ表現を以下のように示す。

$$E_d \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u(t) \quad (9)$$

$$E_d = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \\ -G & -F & -E \end{bmatrix}$$

変動パラメータ M_b が存在する倒立振り子ロボットの制御系設計におけるディスクリプタ方程式は式 (9) で表す。

5 ロバスト最適制御

変動パラメータが存在するシステム式 (9) の二次安定条件の導出を行い、LMI 条件に基づくロバスト最適制御器を設計する。

状態フィードバックゲインを K_d とし、 $u = K_d x_d$ とした以下の式を使用する。

$$\begin{cases} E_d \dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u(t) \\ u(t) = K_d x_d(t) \end{cases} \quad (10)$$

リアプノフ行列を $P_d (P_d \neq P_d^T)$, $E_d P_d = (E_d P_d)^T \succ 0$ とし、リアプノフ関数を定め、前述の車体の重量が一定のときに定義した条件と同様に重み行列 $Q_d, R_d \succ 0$, 評価関数 $J_d = \int_0^\infty (x_d(t)^T Q_d x_d(t) + u(t)^T R_d u(t)) dt$ を与えた不等式を以下に定義する。

$$\begin{cases} V_d(x) = x(t)^T E_d P_d x(t) \\ \dot{V}_d(x) = \dot{x}_d(t)^T E_d P_d x_d(t) + x_d(t)^T E_d P_d \dot{x}_d(t) \end{cases} \quad (11)$$

$$\text{He}[P_d^T (A_d + B_d K_d)] + Q_d + K_d^T R_d K_d \prec 0 \quad (12)$$

式 (12) より $J_{d\infty} \leq x_d(0)^T P_d x_d(0) \leq \gamma_d$ を満たす最小値 γ_d を求める LMI 条件を設計する。

未知変数 P_d と K_d の間に非線形項が存在する為、 $X_d = P_d^{-1}$ および $Y_d = K_d X_d$ で書き換える。

式 (12) の左右にそれぞれ X_d^T, X_d を掛けた後、 $P_d^{-1} = X_d, K_d X_d = Y_d$ の順に置き換えることで次の行列不等式を得る。

$$\text{He}[A_d X_d + B_d Y_d] + \begin{bmatrix} Q_d^{\frac{1}{2}} X_d \\ Y_d \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & R_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_d^{\frac{1}{2}} X_d \\ Y_d \end{bmatrix} \prec 0 \quad (13)$$

式 (13) に Schur の補題を用いると X_d, Y_d について以下の LMI 条件を得る。

$$\begin{bmatrix} \text{He}[A_d X_d + B_d Y_d] & (Q_d^{\frac{1}{2}} X_d)^T & Y_d^T \\ Q_d^{\frac{1}{2}} X_d & -I & 0 \\ Y_d & 0 & -R_d^{-1} \end{bmatrix} \prec 0 \quad (14)$$

また、 $E_d P_d = (E_d P_d)^T$ から、

$$X_d = \begin{bmatrix} X_{11} (4 \times 4) & 0_{(4 \times 2)} \\ X_{21} (2 \times 4) & X_{22} (2 \times 2) \end{bmatrix} Y_d = \begin{bmatrix} Y_{11} (1 \times 4) \\ 0_{(1 \times 2)} \end{bmatrix}^T$$

と表し、 X_{11}^{-1} の上限として $W_{4 \times 4}$ を定め、同様に LMI 条件に書き換え以下の式を追加する。

$$\begin{bmatrix} W & I_{4 \times 4} \\ I_{4 \times 4} & X_{11} \end{bmatrix} \succ 0, \text{tr}(W) < \gamma_d \quad (15)$$

よって、式 (14), (15) を満たす最小値 γ_d が存在するならば、車体の重量 M_b の適切な端点から端点の変動においてフィードバックゲイン $K = Y_{11} X_{11}^{-1}$ はシステム式 (6) を漸近的に安定させることが出来る。

上記の LMI 条件の導出過程に [8] を参照した。

6 シミュレーション

実行時間 5 秒間、近似の間隔 0.001[s] でシミュレーションを行った。時間 t の取る範囲が短く時間刻み幅も十分に小さい値を使用したため微分方程式の近似解を求めるための平易な手法である微分のオイラー近似を用いた。入力 $u(t)$ 状態変数 $x(t)$ がどちらも過大にならず ($|u(t)| < 6[V]$) 0 に収束するように行列 Q, R を調整した。車体の重量を大きくしたときの入力、各状態変数の変化を調べた。状態フィードバック制御系におけるシミュレーションでのセットアップを次に示す。

$$R = 1 \quad Q = \text{diag}([8.6 \ 0.28 \ 0.72 \ 0.4])$$

と設定し状態変数の初期値は $x = [0.1 \ 0.15 \ 0 \ 0]^T$ とした。倒立振子に 12.712[kg] の重りが積まれる場合を想定して状態フィードバック制御系のシミュレーションを行った。倒立振子に 12.712[kg] の重りが積まれる場合を想定したときのゲインを $K1$ とする。重りの質量 12.712[kg] は入力電圧が 6[v] を超えないときの最大の車体の質量 13.014[kg] からその車体の質量 0.302[kg] を引いた値である。 $K1$ は以下のようになった。

$$K1 = [2.9368 \ 38.0416 \ 2.0643 \ 1.3450]$$

図 3 に車体の回転角度のシミュレーション結果を示す。図 4 に車輪の角速度のシミュレーション結果を示す。図 5 に車体の質量 Mb の値が 13.014[kg] より小さい値をとるときに入力電圧が 6[V] 未満であることを検証したシミュレーション結果を示す。図 6 に車体の質量 Mb の値が 13.014[kg] より大きい値をとるときに入力電圧が 6[V] を超えることを検証したシミュレーション結果を示す。

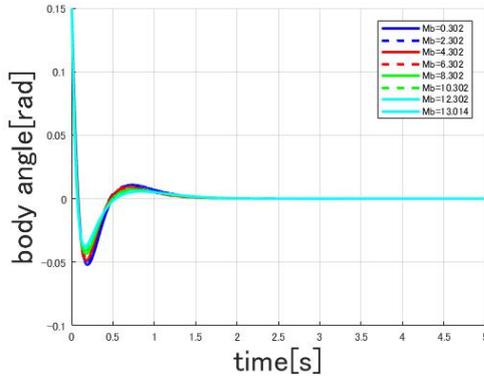


図 3 状態フィードバック制御系における車体の回転角度のシミュレーション結果

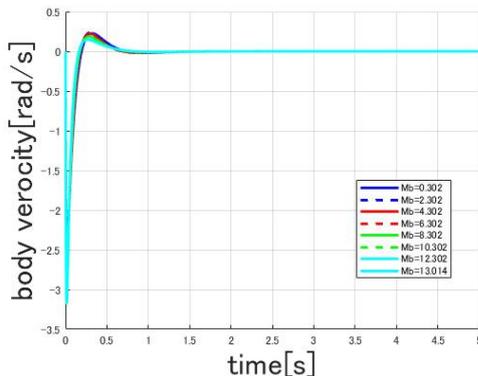


図 4 状態フィードバック制御系における車輪の角速度のシミュレーション結果

Mb の値が 13.014[kg] を超える場合のシミュレーションは入力電圧の 6[V] を超えるので行っていない。図 3 図 4 より車体の質量を 0.302[kg] から 13.014[kg] に変化させた場合においても車輪の角速度、車体の回転角度は 0 に収束した。

ロバスト制御系におけるシミュレーションでのセットアップを次に示す。

$$R = 1 \quad Q = \text{diag}([7.1 \ 0.38 \ 0.68 \ 0.4 \ 1e-5 \ 1e-5])$$

変動パラメータを車体の重量 $Mb=[0.251 \ 25.488]$ とした。 $Mb=[0.251 \ 25.488]$ の範囲で車体の質量が変化するときのゲインを $K2$ とする。 $K2$ は以下ようになった。

$$K2 = [0.5860 \ 39.6089 \ 1.2137 \ 0.8036]$$

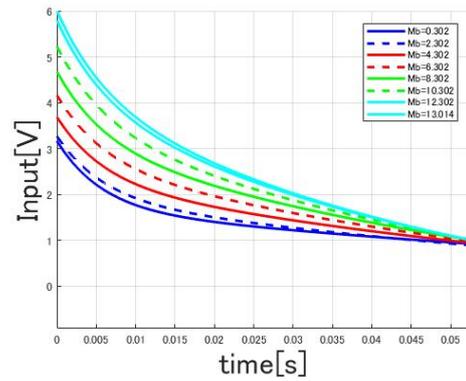


図 5 状態フィードバック制御系において入力電圧が 6[V] 未満であることを検証したシミュレーション結果

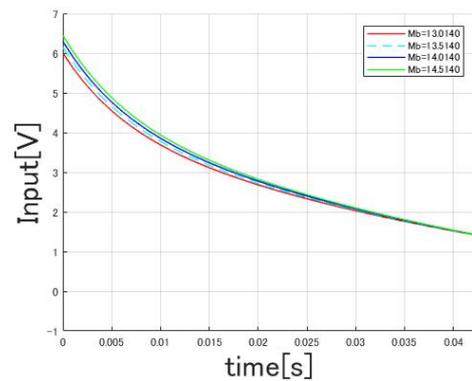


図 6 状態フィードバック制御系において入力電圧が 6[V] を超えることを検証したシミュレーション結果

倒立振子に 25.186[kg] の重りが積まれる場合を想定してロバスト制御系のシミュレーションを行った。重りの質量 25.186[kg] は入力電圧が 6[V] を超えないときの最大の車体の質量 25.488[kg] からもとの車体の質量 0.302[kg] を引いた値である。図 7 に車体の回転角度のシミュレーション結果を示す。図 8 に車輪の角速度のシミュレーション結果を示す。図 9 に車体の質量 Mb の値が 25.488[kg] より小さい値をとるときに入力電圧が 6[V] 未満であることを検証したシミュレーション結果を示す。図 10 に車体の質量 Mb の値が 25.488[kg] より大きい値をとるときに入力電圧が 6[V] を超えることを検証したシミュレーション結果を示す。

Mb の値が 25.488[kg] を超える場合のシミュレーションは入力電圧の 6[V] を超えるので行っていない。図 7 図 8 より質量が $0.251 \leq Mb \leq 25.488$ の範囲で変化する場合においても車輪の角速度、車体の回転角度は 0 に収束した。最適制御を制御方法とした場合より倒立振子に 12.474[kg] の重りを多く乗せても入力電圧の 6[V] を超えないで車輪の角速度、車体の回転角度は 0 に収束するのでロバスト性能が向上したコントローラであるといえる。

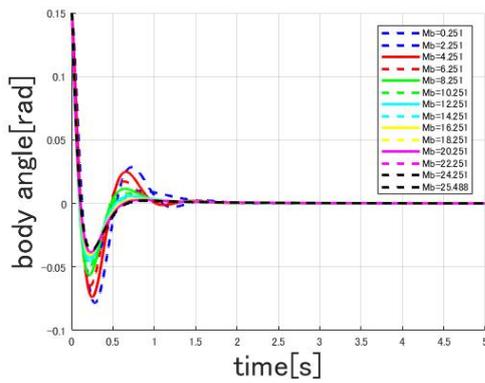


図 7 ロバスト制御系における車体の回転角度のシミュレーション結果

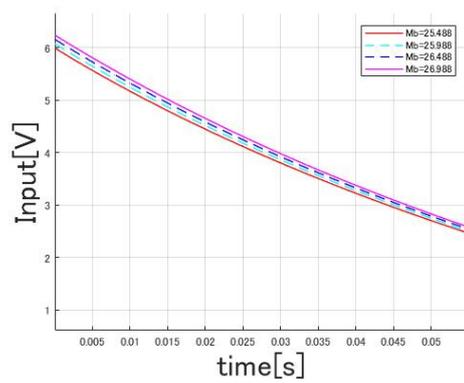


図 10 ロバスト制御系において入力電圧が 6[V] を超えることを検証したシミュレーション結果

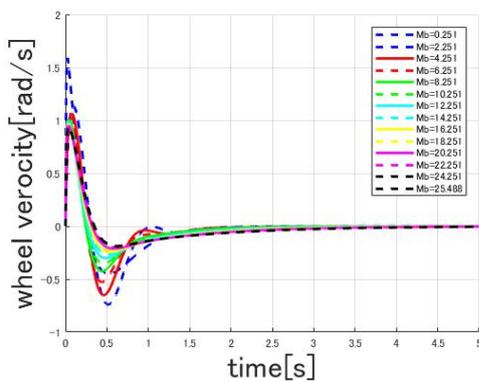


図 8 ロバスト制御系における車輪の角速度のシミュレーション結果

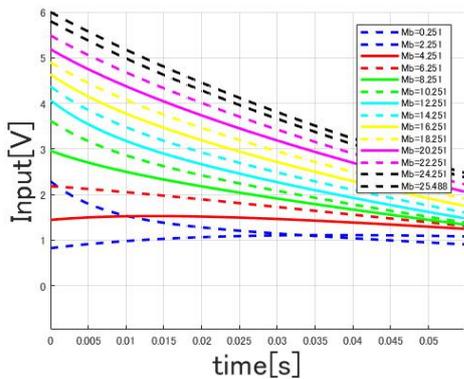


図 9 ロバスト制御系において入力電圧が 6[V] 未満であることを検証したシミュレーション結果

7 おわりに

本研究では二輪型倒立振子を用いてコントローラのロバスト性能を評価を行った。車体の重さを大きくしていった場合シミュレーション上では各状態変数は 0 に収束した。車体の質量の変動に対してロバスト最適制御が有効であることをシミュレーションにより確認した。

8 参考文献

参考文献

- [1] calm0815(kuwano), calm0815/BalboaRobotics
<https://github.com/calm0815/BalboaRobotics>
- [2] 陳幹, 77375-001 機械電子制御工学実習ロボット制御実験, 理工学部 (情報理工学部)・理工学研究科 (学内向け)/講義資料
- [3] Fuquan Dai, Xueshan Gao, Shigong Jiang, Wenzeng Guo, Yubai Liu, "A two-wheeled inverted pendulum robot with friction compensation", Mechatronics, 21 June 2015, pp3-7.
- [4] Magdi S. Mahmoud, Mohammad T. Nasir, "Robust control design of wheeled inverted pendulum assistant robot", IEEE/CAA Journal of automatica sinica, vol4, No4, October 2017, PP.629-637.
- [5] 川田昌克, MATLAB/Simulink による現代制御入門, 森北出版 (2011.6.2)
- [6] 川田昌克 (編著)・東俊一・市原裕之・浦久保孝光・大塚敏之・甲斐健也・國松禎明・澤田賢治・永原正章・南裕樹 倒立振子で学ぶ制御工学, 森北出版 (2017.2.28)
- [7] 2009SE138 熊田 健良 2010SE238 谷口巧磨 ディスクリプタ表現を用いた磁気浮上装置に対するロバスト制御, 南山大学 情報理工学部・数理情報学部 2013 年度卒業論文要旨集
- [8] M2016SC006 Yuki ISHII, Gain-Scheduling Observer for Twin Rotor Helicopter considering Unmeasurable Slung Load Angle, 2017 年度理工学研究科修士論文要旨集