

垂直な柱に絡んで降下する円環の力学的シミュレーション

2015SS012 秦静哉

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

通常、円柱の棒に円環を通して落下させてもただ落ちていく。しかし、円柱の外径と円環の内径の差が小さければ円環は棒に絡むように回転し落下する。この円環の運動に興味をもった。この運動には剛体力学が大きく関わっている。本研究ではこの現象が起きる原理を研究をするため剛体力学について詳しく学び、実験として円環が運動している様子を撮影し繰り返し行う。実験から得られたデータと Mathematica で作成した図をもとに円環の運動を解析しこの運動が妥当なものであるか検証する。またこの運動に摩擦が働いていること立証するために運動方程式を立てて摩擦が働く条件を導き出す。

2 実験と検証

撮影した動画から、円環の重心は円柱の中心軸の周りを等速で回転しながら、等速で下降する、螺旋運動をしているように見える。同時に円環自体は、円環の重心の周りを回転している。円柱の中心軸の周りの重心の回転運動の周期を「グリーン」と呼ぶ。また円環の重心周りの回転運動の周期を「クリン」と呼ぶ。

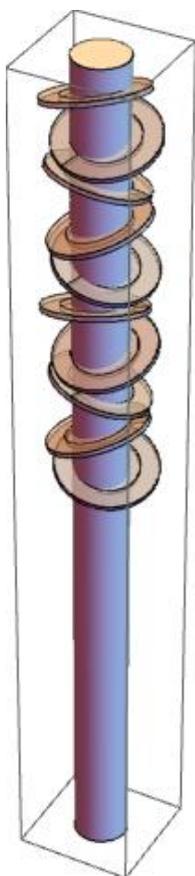


図 1. 運動の様子

測定より、円柱と円環に関する物理量として以下の値を採用する。

$$\begin{aligned}2R &= 18.17, \\2R_0 &= 21.19, \\2R_1 &= 33.51, \\d &= 3.04, \\m &= 11.333.\end{aligned}$$

実験では円環の運動の様子をデジタルカメラのスローモーション機能で動画を取り、グリンの周期 T_1 とクリンの周期 T_2 を測定する。今回の実験では 1 秒間に 400 コマ撮影するカメラを使用しているため、時間の計算は

$$\text{周期 (秒)} = \frac{\text{コマ数}}{400} \quad (1)$$

とする。グリンの周期では 3 グリンでの数値となるのでさらに 3 で割る。

次に表 (2.1), (2.2) より T_2/T_1 の値は 6.99999988 と限らなく 7 であることが計算できた。また、 T_2 における降下速度 v_z の計算は

$$v_z = \frac{2 * (\text{終了高度} - \text{開始高度})}{3(\text{クリン}) * \text{グリンの周期} * 1000} \quad (2)$$

で求められる。2 を掛けるのは木棒には 1 目盛 2mm の線が引かれており開始高度、終了高度は目盛りの数字のためである。

表 1 5 グリンの周期データ (T_1)

測定	コマ数	周期 (秒)	角速度= 2π /周期
1 回目	110	0.055	114.1818
2 回目	115	0.055	114.1818
3 回目	106	0.053	118.4906
4 回目	107	0.0535	117.3832
5 回目	107	0.0535	117.3832
平均	108	0.054	116.2963

開始高度、終了高度は mm、降下速度は m/秒である。

また、理論として図 3 と図 4 を用いて式を立てて計算する。 r は鉄製ワッシャー (円環) の内径の $1/2$ なので 10.595、 p は $2 * (\text{終了高度} - \text{開始高度}) / 3(\text{クリン})$ として計算する。

図 4 より、長さ A は円環の姿勢が 1 周期の間に動く距離である。ピタゴラスの定理より

$$A = \sqrt{2\pi r^2 + p^2}$$

表2 1クルンの周期データ (T_2)

測定	コマ数	1周期 (秒)	角速度= 2π /周期
1回目	150	0.375	16.74667
2回目	155	0.3875	16.20645
3回目	154	0.385	16.31169
4回目	151	0.3775	16.63576
5回目	146	0.365	16.61376
平均	151.2	0.378	16.61376

表3 降下速度

測定	開始高度	終了高度	降下速度
1回目	1.5	10.2	0.107407
2回目	1.0	9.5	0.104938
3回目	0.5	8.7	0.101235
4回目	1.3	10.7	0.116049
平均	1.075	9.775	0.107407

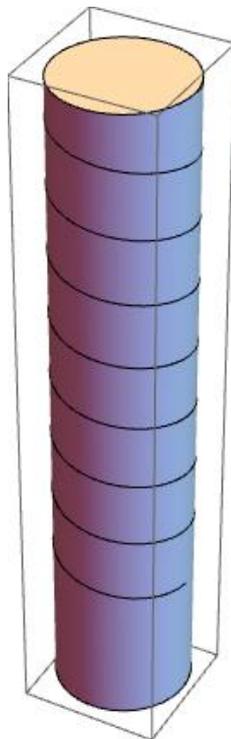


図.3 円筒

が成り立つ。このとき、角度が θ だったとすると、

$$A = \sqrt{(r\theta)^2 + \left(\frac{\theta p}{2\pi}\right)^2}$$

となる。

動画から得られた結果から円環が1クルンする間に約7グルン (6.99999988) することが表 (2.1), (2.2) から得られ、計算によって導かれた値は 7.24086 で誤差が小さいことからこの実験の妥当であることが検証された。

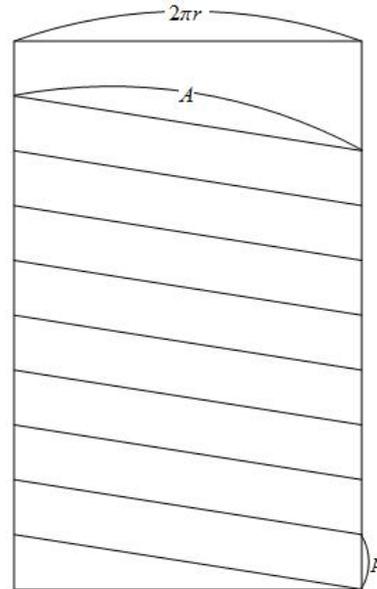


図.4 図3の展開図

3 運動方程式による証明

円環が円柱と1点のみで接触しているなら、円環は円柱面を転がり下りることになる。このとき、摩擦は発生しないので、円環が降下してポテンシャルエネルギーを失うにつれ、運動エネルギーが増加する。これは、円環が等速降下するという観察と合わない。したがって、円環は円柱と2点で接触するものとする。接点の計算、降下角と降下速度の計算、重心の並進運動の方程式、円環の慣性モーメントテンソル、重心周りの回転運動の方程式、力の方程式の非可解性を順に計算した結果、この2点の接触モデルは成立しないことが判明した。

4 おわりに

本研究では、まず円環の運動を解明するため、デジタルカメラによる運動の観察を行い、実験から得られたデータから導き出した値と円環の軌跡を計算によって求め、この運動は妥当なものであることを検証した。実験から導き出した値は円環が1クルンするまでに 6.99999988 グルン、計算によって得られた値は 7.24086 グルン。この誤差を小さいと判断し、2点接触しつつ転がり下りる力学モデルを作った。しかし、このモデルに解が存在しなかったため、根本的にデータの見直しと取り直しを行って新しい力学モデルを作る必要がある。

また、チャッターリングによる実験は時間的な余裕がなく、実験装置も完成は至らず今後の課題として残った。

参考文献

- [1] 十河清・和達三樹・出口哲生：「ゼロからの力学 I II」。岩波書店、東京 (2013)。