最適レギュレータを用いた Control Moment Gyroscope の目標値を特異点とした追従制御

2014sc026 笠原隆世

指導教員：高見勲

1 はじめに

Control Moment Gyro(以下 CMG) は線形システムでの制御、非線形システムの制御のどちらも可能な実験機であり、様々な制約を持っている。その中でも特異点について着目する。特異点はその付近では状態依存リッカチ方程式の入力の働かない点であり、一般的にその付近に目標値を置くことはできない。そこで、今回は最適レギュレータの一種である SDRE 法を用いることによって特異点にむけての Gimbal3 の目標値追従制御を行う。

2 制御対象

2.1 CMG の概要

本研究で用いられる CMG について説明する。CMG は一つのロータとそれを中心にして 3 つのジンバルが取り付けられてあり、合計 4 つの剛体によって構成されている。

2.2 モデリング

CMG のロータを回転させる駆動トルクを $T_1(t)$、ジンバル 2 を回転させる駆動トルクを $T_2(t)$ とする。$q_1(t)$ はジンバル 2 からみたロータの相対角度を示し、ω_1 はロータ 1 の角速度を示す。$q_2(t)$ はジンバル 3 からみたジンバル 2 の相対角度を示し、ω_2 はジンバル 2 の角速度を示す。$q_3(t)$ はジンバル 4 からみたジンバル 3 の相対角度を示し、ω_3 はジンバル 3 の角速度を示す。$q_4(t)$ はジンバル 4 の角度を示し、ω_4 はジンバル 4 の角速度を示す。以上の条件でモデリングを行うために剛体それぞれの慣性モーメント、座標変換行列、角速度ベクトルを定義する。次に Lagrangian L を導出し、Euler-Lagrange 方程式によりシステムの運動方程式を求める。Lagrangian L は

$$\frac{1}{2}(K_A\omega_4^2 + I_B\omega_4^2\sin(q_3)^2 + J_B\omega_3^2 + K_B\omega_4^2\cos(q_3) + (I_C+I_D)(\omega_2-\omega_4\sin(q_3))^2$$

となる。ここで、$I_A, I_B, I_C, I_D, J_A, J_B, J_C, J_D, K_A, K_B, K_C, K_D$ はそれぞれジンバルの慣性モーメントを示している。導出した L を用いて Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}) - \frac{\partial L}{\partial q_i}(i=1,2,3,4)$$

を導出し、さらにそこから CMG の運動方程式を導出する。運動方程式は、以下のような関数で表される。

$$f_1(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\dot{\omega_1},\dot{\omega_3},\dot{\omega_4}) = T_1 \quad (1)$$

$$f_2(q_2,q_3,\omega_1,\omega_3,\omega_4,\dot{\omega_2},\dot{\omega_4}) = T_2 \quad (2)$$

$$f_3(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\dot{\omega_1},\dot{\omega_3},\dot{\omega_4}) = 0 \quad (3)$$

$$f_4(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\dot{\omega_1},\dot{\omega_2},\dot{\omega_3},\dot{\omega_4}) = 0 \quad (4)$$

2.3 拘束条件

本研究では、ジンバル 3 とジンバル 4 の拘束条件を用いて状態方程式、駆動トルク T_1,T_2 について求め、それを元に制御を行う。式 (3) の一階積分は

$$\int f_3(q_2,q_3,\omega_1,\omega_3,\omega_4) = C(C:\text{初期角運動量})$$

ここで、ジンバル 3 は初期状態に置いて静止しているとすると $(C=0)$ ジンバル 3 拘束条件として

$$\int f_3(q_2,q_3,\omega_1,\omega_3,\omega_4) = 0 \quad (5)$$

を持つ。ジンバル 4 についても同様の処理を行うと、拘束条件

$$\int f_4(q_2,q_3,\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = 0 \quad (6)$$

を持つことが分かる。

3 状態方程式

式 (5) と (6) を連立させて ω_1、ω_4 について解くと

$$\omega_1 = f_5(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3) \quad (7)$$

$$\omega_4 = f_6(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3) \quad (8)$$

$$\dot{\omega_1} = \frac{d}{dt}f_5(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3) \quad (9)$$

$$\dot{\omega_4} = \frac{d}{dt}f_6(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3) \quad (10)$$

となる。式 (7),(8) を式 (1),(2) に代入すると、それぞれ

$$f_1(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3,\dot{\omega_2},\dot{\omega_3}) = T_1 \quad (11)$$

$$f_2(q_2,q_3,\omega_2,\omega_3,\dot{\omega_2},\dot{\omega_3}) = T_2 \quad (12)$$

となる。式 (11),(12) をまとめると、

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{33}(t) & E_{34}(t) \\ 0 & 0 & E_{43}(t) & E_{44}(t) \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & A_{33}(t) & A_{34}(t) \\ 0 & 0 & A_{43}(t) & A_{44}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_3 \\ \dot{q_2} \\ \dot{q_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

となり、ジンバル 2, ジンバル 3 に対しての状態方程式となる。しかし、この式 E, A の行列が 4 行 4 列であり、この行列の要素数が多いと E の逆行列の値が大きくなり特異点付近でハイゲインになりやすいという欠点を抱えている。そこでジンバル 3 のみに対する状態方程式を作ることにより、ハイゲインになりやすいという欠点を抑える。
式 (7) に式 (8)、(9) を代入することで

$$\begin{aligned} f_4(q_2, q_3, \omega_2, \omega_3) &= 0 \\ \omega_2 &= f_7(q_2, q_3, \omega_3) \end{aligned} \tag{14}$$

とすることが出来るのでこれを式 (11),(12) に代入することで

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_{3_{22}} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} q_3 \\ \omega_3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A_{3_{21}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ \omega_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

となり、E, A 行列の要素が減ったことでハイゲインになりやすいという欠点を抑える事が出来る。

4　制御手法

ジンバル 3 の角度が特異点に近づくまでは式 (13) を、特異点付近では式 (15) を用いて SDRE 法による制御を行う。
SDRE 法とは本来最適レギュレータを用いるときは状態方程式の A が時変のものには対応していない。そこで単位時間ごとに時変の変数に値を入れることで最適レギュレータを解くことを可能にするものである。特異点付近を $-q_f < q_3 < q_f (q_f = 0.02(\mathrm{rad}))$ とする。また、$q_3 = 0$ に限りなく近い点では不可制御となるので、そこでは入力を 0 とする。

5　シミュレーション

重み Q, R を下記に示す。

$$Q = diag([\ 0.3 \quad 0.1 \quad 80 \quad 0.01\ ])$$

$$R = diag([\ 500000 \quad 500000\ ])$$

連続で切り替えるために 0.05(rad) から 0.02(rad) の間で Gimbal3 の角度 q_3 を用いて、(13) での状態フィードバックゲインを K_{32}、(15) での状態フィードバックゲインを K_{33} とすると

$$\frac{q_3 - 0.02}{0.03} K_{32} + \frac{0.05 - q_3}{0.03} K_{33}$$

として連続にする。初期条件を

$$[-\frac{\pi}{7} \ \ \frac{\pi}{7} \ \ 0 \ \ 0]^T$$

とし、シミュレーション時間を 250(s) としてシミュレーションを行う。以下に Gimbal3 の角度のシミュレーション結果を示す。グラフより Gimbal3 は 0 に追従している事が分かる。

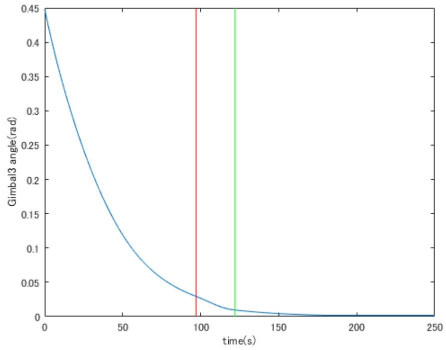

図 1　ジンバル 3 の角度の時間変化

6　実験

実験では、実験機の都合上、初期値を

$$[-\frac{\pi}{7} \ \ \frac{\pi}{2} \ \ 0 \ \ 0]^T$$

として行った。以下のグラフより、Gimbal3 の追従実験には成功しているが、目標の誤差の範囲内にはまだ入っていない事が分かる。そのため、摩擦を考慮したモデルを立てる必要がある。

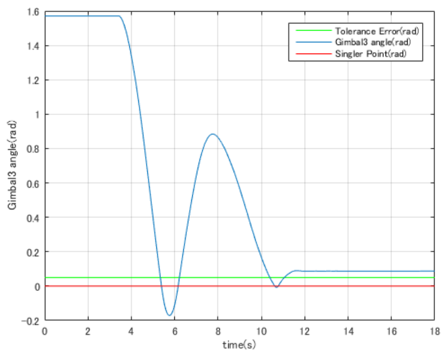

図 2　ジンバル 3 の実験結果

7　おわりに

本研究では CMG を最適レギュレータを用いて特異点に追従制御を行うための研究を行った。シミュレーションでは、特異点付近で追従させることができた。

8　参考文献

[1] 太田清志郎：『一階非ホロノミック拘束を持つ Control Moment Gyro の非線形制御』. 南山大学 数理情報学部 情報システム数理学科 愛知 2012

[2] 鈴木　聡: 『SDRE 法による制御器の設計法とその応用・例』東京電機大学 未来科学部 ロボットメカトロニクス学科 2005