1変数非線形方程式に対する多点反復法

2014SS047 三浦真衣

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

本研究では1変数非線形方程式 $f(z)=0$ の解 $z=\alpha$ を求めるための多点反復法について考察する．反復法では方程式の解 $z=\alpha$ に収束する近似列 $z_0, z_1, \cdots, z_k, \cdots$ を順次生成し，適当な k で停止して $z_k \cong \alpha$ を近似値として採用する．

1点反復法は z_k から z_{k+1} を生成するときに1点 z_k 上の関数値と微係数 $f(z_k), f'(z_k), \cdots$ を用いる．多点反復法では z_k から生成した補助点列 $w_0=z_k, w_1, \cdots$ 上の関数値と微係数を用い，z_{k+1} を生成する．その際，関数値と微係数を m 個用いるものを m 点反復法という．

H. T. Kung と J. F. Traub[2] は m 点反復法が達成できる単解に対する最高の収束次数は 2^{m-1} 次であるという仮説を提出し，現在に至るまでこの仮説は否定されていない．最近 Jovana Džunić と Ivan Damnjanović により，任意整数 $m \geq 2$ に対して収束次数が 2^{m-1} 次の m 点反復法が発見された [1](2017)．Kung-Traub の仮説が正しいなら，これは最高次数の多点反復法である．

本論文では，この「最良」反復法の特徴を調べ，その実用性について考察する．数値実験により Džunić-Damnjanović の m 点反復法の特性を調べる．まず，この反復法で実際に収束次数 2^{m-1} 次が達成されるかどうかを数値的に調べる．数値誤差の混入により，実際の計算では理論的な特性が壊れてしまうことがあるからである．これは，彼らの収束理論の正しさの実験的検証にもなる．

さらに，彼らの m 点反復法の大域収束性について，実験的な検証を加える．収束次数は反復法の局所的収束性を特徴付けるが，解から離れた場所から着実に解に接近する性質（大域的収束性）も実用的に重要な性質である．

2　Džunić-Damnjanović の m 点反復公式

2.1　反復法の収束次数

反復法の収束次数について，[3](pp.95-107) に従って解説する．近似列 $x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots$ について，2つの正数 $C>0, 0<r<1$ が存在し，十分大きな k について

$$|x_k-\alpha| \leq Cr^k \tag{1}$$

なら，x_k は収束率 r で α に1次収束するという．r が小さいほど x_k の収束は急速である．2つの正数 $C>0, p>1$ が存在し，十分大きな k について

$$|x_{k+1}-\alpha| \leq C|x_k-\alpha|^p \tag{2}$$

が成立するなら，x_k は α に p 次収束するという．p が大きいほど x_k の収束は急速である．反復法は他の条件が同じなら収束次数が高いほど効率的である．

2.2　Džunić-Damnjanović の m 点反復公式

非線形方程式 $f(z)=0$ に対する Džunić-Damnjanović の反復法 (D-D 反復法) では，z_k から z_{k+1} を次の公式により生成する．

$$\begin{aligned} w_0 &= z_k, \quad w_1 = w_0+\gamma f(w_0), \\ w_j &= w_{j-1}+\frac{g[w_{j-2},\cdots,w_0]}{g[w_{j-1},\cdots,w_0]}(j=2,3,\cdots,m), \\ z_{k+1} &= w_m \end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$g(z)=1/f(z)$ であり，$\gamma \in \mathbb{C}$ は自由に設定できる複素パラメタである．また $g[]$ は g の差分商である．この公式は補助点列 $z_k=w_0,\cdots,w_m$ を介し，z_k から z_{k+1} を計算する m 点反復法である．1回の反復に m 個の関数計算 $f(w_0),\cdots,f(w_{m-1})$ が必要である．

任意パラメタ $\delta=0$ のときは，$w_0=w_1$ となり，公式 (9) は反復公式

$$\begin{aligned} w_0 &= w_1 = z_k, \quad w_2 = w_0-\frac{f(w_0)}{f'(w_0)}, \\ w_j &= w_{j-1}+\frac{g[w_{j-2},\cdots,w_0]}{g[w_{j-1},\cdots,w_0]}(j=2,3,\cdots,m), \\ z_{k+1} &= w_m \end{aligned} \tag{4}$$

となる．1回の反復に微係数1個 $f'(w_0)$ と関数値 $m-1$ 個 $f(w_0),\cdots,f(w_{m-1})$，合計 m 個の関数計算を必要とするので，これも m 点公式である．

この反復法 (3) について次の定理が成り立つ [1].

［定理4.1］反復公式 (3) において，任意の $2 \leq j \leq m-1$ について

$$x_k \to x_{k+1} = y_j = \psi_{\ j}(y_0, y_1, , \cdots, y_{j-1})$$

が収束次数 2^{j-1} の最適点反復法であるとする．このとき，反復法 (3) は収束次数の最適点反復法である．//

Mathematica による数値実験で，m 点 D-D 反復法が実際に 2^{m-1} 次であることを確認した．

3　Džunić-Damnjanović 公式の大域収束性

3.1　実験方法

D-D 反復法の大域収束性を見るために，方程式 $f(z)=z^3-1=0$ の3つの解

$$\alpha_1=1, \quad \alpha_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \alpha_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \tag{5}$$

を求める数値実験を行った．

正方形領域 $D=[-2,2]\times[-2,2]$ を実軸虚軸方向に $n=500$ 等分した点

$$z_{kl}=\left(-2+\frac{4k}{n}\right)+i\left(-2+\frac{4l}{n}\right), \quad 0 \leq k \leq n,\ 0 \leq l \leq n$$

をとり，z_{kl} を初期値として D-D 反復を行う．

解 α_1 の $\frac{1}{1000}$ 近傍に反復列が入ったら，その反復列は α_1 に収束すると判定し，初期値 z_{kl} の位置に赤色の点を描く．同様にして α_2 に収束すると判定されれば緑色の点を描く．また α_3 に収束すると判定されれば青色の点を描く．また，$\frac{1}{1000}$ 近傍に入るまでの反復回数が小さいほど同色で明るい色を塗った．

$m = 2$ の Newton 法について説明した方法で描いた図を図 1 で示す．この図で小さな○印が解 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ の位置である．それぞれ赤色，緑色，青色の点集合の中にある．

赤色の点集合は，α_1 を含む大きな連結成分 A1 と 3 個の比較的大きな三葉虫風の有界連結成分，そしてそれらとほぼ相似形の無数の三葉虫からなる．赤の点から出発した反復列は、赤の三葉虫を渡り歩き，最後に A1 に飛び込み，以後は A1 の中で α_1 に収束する．A1 を α_1 の直接吸引鉢という．同様に α_2, α_3 も緑色，青色の直接吸引鉢 A2,A3 をもつ．

直接吸引鉢 A1,A2,A3 が互いに接近する領域は 3 色の三葉虫が複雑に入り混じっている．この領域に初期値をとると反復列は，迷走してなかなか解に収束しない．この領域をここでは「迷走域」と呼ぶことにする．直接吸引鉢が大きくて迷走域が細い反復法は大域収束性が良いと考えられる．同様の実験を $m = 3$(Ostroski 法)，$m = 4$，$m = 5$ で行った結果が図 2，図 3，図 4 である．明らかに m が大きくなるにつれ直接吸引鉢が大きくなり，迷走域が細くなることがわかる．D-D 反復法は，m が大きくなるほど収束次数が高くなり局所収束性がよくなるばかりでなく，大域収束性も向上することがわかった．

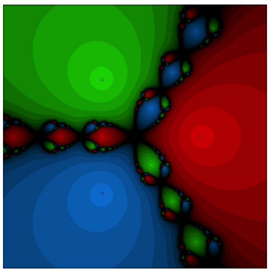

図 1　$m = 2$

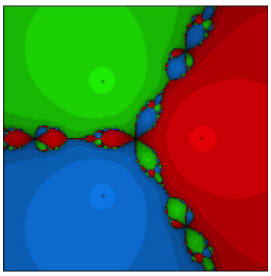

図 2　$m = 3$

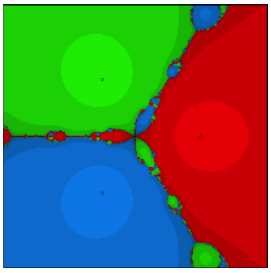

図 3　$m = 4$

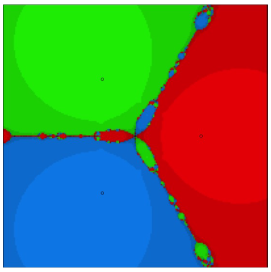

図 4　$m = 5$

4　おわりに

本研究では，Džunić-Damnjanović の最適 m 点反復法 (D-D 反復法) について研究した．

D-D 反復法を Mathematice 上で実現し，その収束次数が 2^{m-1} であることを確認した．また，既存の 1 点反復法と比べても収束次数が高いことを，理論的に示した．

また，$m = 2, 3, 4, 5$ について収束領域を調べた．その結果 m が大きくなるにつれて，迷走領域が狭くなり，収束領域が広くなるとがわかった．すなわち，D-D 反復法は，m が大きくなるほど収束次数が高くなり局所収束性がよくなるばかりでなく，大域収束性も向上することがわかった．

次に，収束速度を見るために，反復列が解の $\frac{1}{1000}$ 近傍に入るのに要した反復回数を数え，それにより初期点に塗る色の明るさを変えた図を作成した．m が大きくなるにつれ，その領域は大きくなり図全体も明るくなることがわかった．すなわち m が大きくなるにつれほぼ全領域で反復回数が減少することがわかった．

以上の実験と考察により，D-D 反復法は，非常に優秀な反復法であることがわかった．

5　参考文献

[1] Jovana Džunić Ivan Damnjanović: General approach to constructing optiomal multipoint families of iterative methods using Hermite's rationalinterpolation, Jounal fo Computational and Applied Mathematics, vol.321,pp.261-269(2017).

[2] H. T. Kung and J. F. Traub: Optimal Order of One-Point and Multipoint Iteration, Journal of ACM, Vol.21, No. 4, pp.643-651(1974).

[3] 杉浦洋：数値計算の基礎と応用，サイエンス社 (2009).