長方形領域における 2 次元 7 次適応型積分則

2014SS043 増田充宏

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

2 次元領域において，定積分を求めることは数学の基本的な問題である．任意の 2 次元領域上の積分は，領域分割と変数変換により，長方形領域上の積分に帰着される．このことは，長方形領域上の数値積分法を作成することによって任意の 2 次元領域上の積分ができることを意味する. ゆえに，長方形領域上の積分則は基本的かつ重要である．

本研究は，2 次元長方形領域上において，定積分を近似する適応型積分則を設計するものである．

長方形分割については，片峯 [2]，古田 [1]，野田 [3] らが研究している．片峯は，信頼性の高い 3 次積分則を構成した．古田は，精度の高い 5 次再利用可能完全対称公式を作成した．野田は，基本積分則として古田の公式を改良したものを用いて片峯より精度が高い適応型積分則を構成した．

本研究では，さらに次数の高い 7 次公式を作成し，過去の研究より高精度な適応型積分則を設計する．また，高次の複雑な公式を扱うことにより誤差推定法の理論を整備し発展させる．

2　数値積分則の設計

xy-平面上の長方形領域を $D = [a, b] \times [c, d]$ と書く．D 上の関数 f の積分を $Q(D)f = \int_D f(x)dxdy$ と書く．基本正方形領域 $\Delta = [-1, 1]\times[-1, 1]$ の n 個の標本点 $\boldsymbol{\pi}_1 = (\xi_1 ,\eta_1), \boldsymbol{\pi}_2 = (\xi_2,\eta_2)$，$\cdots, \boldsymbol{\pi}_n = (\xi_n,\eta_n) \in \Delta$ と重み $\rho_1, \rho_2, \cdots ,\rho_n$ による積分公式を

$$I_n f = \sum_{l=1}^{n} \rho_l f(\boldsymbol{\pi}_l) \cong \int_\Delta f(\boldsymbol{x})dxdy \tag{1}$$

と書く．

$\boldsymbol{q} \in \Delta$ から一般の長方形領域 $\boldsymbol{p} \in D$ へのアフィン変換 $\boldsymbol{p} = \varphi(\boldsymbol{q})$ による変数変換で

$$Q(D)f = \int_D f(\boldsymbol{p})dxdy = \frac{S}{4}\int_\triangle f(\varphi(\boldsymbol{q}))dtdu. \tag{2}$$

この右辺に積分則 I_n を用いて D 上の積分公式

$$I_n(D)f = \frac{S}{4}\sum_{i=1}^{n} \rho_i f(\varphi(\xi_i, \eta_i)) \cong Q(D)f \tag{3}$$

を得る．ここで，S は D の面積である．

[定義 2.1]　任意の s 次式 f で $I_n(D)f = Q(D)f$，かつ $I_n(D)f \neq Q(D)f$ となる $s+1$ 次式 f が存在するとき，積分公式 $I_n(D)$ は次数 s であると言う．//

3　適応型積分則の基本アルゴリズム

$\epsilon > 0$ を許容誤差とする適応型積分則 $Q(D, \epsilon)$ は次のような再帰関数で表現できる．

$$Q(D,\epsilon)f = \begin{cases} I_n(D)f & (E_n(D)f \le \epsilon) \\ Q(D_1,\frac{\epsilon}{2}) + Q(D_2,\frac{\epsilon}{2}) & (E_n(D)f > \epsilon) \end{cases}$$

$E_n(D)$ は $I_n(D)$ の絶対誤差の評価式である．このアルゴリズムでは，与えられた許容誤差 $\epsilon > 0$ に対し真の積分値 $Q(D)f$ の近似積分 $I_n(D)f$ を

$$|I_n(D)f - Q(D)f| \le \epsilon \tag{4}$$

が満たされるなら採用する．もし，

$$|I_n(D)f - Q(D)f| > \epsilon \tag{5}$$

なら，辺に平行な直線で小長方形領域 D_1, D_2 に 2 等分し（図 1），それぞれに同じ積分則 (3) を用いる．

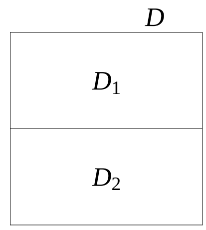


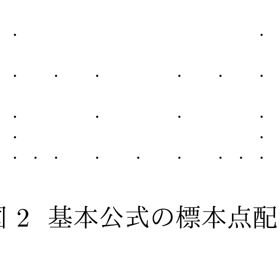
図 1　長方形の分割

この操作を繰り返し，すべての小領域で許容誤差を満たしたとき，近似積分が完了する．辺に平行な直線によって等分割するため，選ぶ辺により，縦横 2 つの分割方向が考えられる．数値積分の効率を高めるためには分割方向の決定が重要である．

4　7 次適応型積分則

4.1　基本積分則

基本積分則として，新たに構成した 7 次再利用可能完全対称公式を用いた．標本点の配置を図 2 に $\cdot$ で示す．



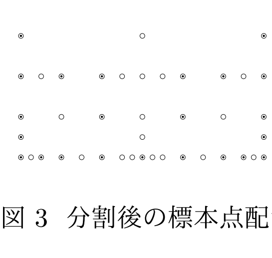


図 2　基本公式の標本点配置　図 3　分割後の標本点配置

標本点数 44 で，図 3 の $^\circ$ は分割時に必要となる新たな標本点である．分割時に必要な点数は 35 点であることがわかる．これが，我々の基本公式の分割コストである．

4.2 誤差推定

誤差評価公式 $E_n(V)f$ を構成する．まず，基本領域における誤差推定法について述べる．一般長方形領域上の誤差評価はアフィン変換により基本正方形領域の誤差評価に帰着する．

Δ における標本点 $(\boldsymbol{\pi}_i)$ 上の 7 次則の重みは，以下のように書ける．

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\rho} + t_1\boldsymbol{c}_1 + +t_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + t_8\boldsymbol{c}_8 \tag{6}$$

ベクトル $\boldsymbol{\rho}$ は基本積分則の重みである．また，ベクトル $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_8 \in \mathbb{R}^n$ は一次独立である．$c_1, \ldots, c_8$ が生成する部分空間を

$$V_7 =< \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_8 > \tag{7}$$

とする．同様に 5 次の公式の重みは

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{\rho} + t_1\boldsymbol{d}_1 + t_2\boldsymbol{d}_2 + \cdots + t_{23}\boldsymbol{d}_{23} \tag{8}$$

と書ける．ここで $\boldsymbol{d}_i \in \mathbb{R}^n$ $(1 \le i \le 23)$ であり $t_1, \ldots, t_{23}$ は自由変数である．また，ベクトル $\boldsymbol{d}_1, \ldots, \boldsymbol{d}_{23}$ は一次独立である．$d_1, \ldots, d_{23}$ が生成する部分空間を

$$V_5 =< \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_{23} > \tag{9}$$

とする．$V_7 \subset V_5$ ゆえ V_5 における V_7 の直交補空間を $V_5^\perp$ とし，その正規直交系をあらためて $\boldsymbol{d_1}, \ldots, \boldsymbol{d}_{15}$ とする．すなわち

$$V_5^\perp =< \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2, \ldots, \boldsymbol{d}_{15} > \tag{10}$$

である．

重みを $\boldsymbol{w}_i = \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{d}_i \quad (1 \le i \le 15)$ とする公式を随伴 5 次公式と呼び，$I_n^i(D), (1 \le i \le 15)$ と書く．

公式 $I_n(D)$ との差

$$E_n^i(D) = I_n^i(D) - I_n(D) \tag{11}$$

により，$I_n^i(D)$ の誤差評価を行うことができる．

$$E_n(D) \equiv \alpha \max_{1 \le i \le 15} \left|E_n^i(D)\right| \tag{12}$$

とし，$E_n(D)f \le \epsilon$ ならば

$$\left|Q_n(D)f - Q(D)f\right| \le \epsilon \tag{13}$$

であり，近似積分は成功したと判定する．ここで，ϵ は許容誤差，α は実験的に定める安全係数である．

4.3 分割方向の決定

領域 D を縦二等分して

$$D = D_L \cup D_R \tag{14}$$

としたときの誤差推定

$$E_{LR}(D)f = E_n(D_L)f + E_n(D_R)f \tag{15}$$

を $E_{LR}(D)f_7$ で近似する．

同様に，D を横二等分して

$$D = D_U \cup D_D \tag{16}$$

としたときの誤差推定

$$E_{UD}(D)f = E_n(D_U)f + E_n(D_D)f \tag{17}$$

を $E_{UD}(D)f_7$ で近似する．

もし，$E_{LR}(D)f_7 \le E_{UD}(D)f_7$ ならば縦分割が有利であり，$E_{LR}(D)f_7 > E_{UD}(D)f_7$ ならば横分割が有利であると判定する．

5 数値実験結果

許容誤差 $\epsilon = 10^{-4}$ で数値実験を行った．野田 [3] の誤差は $1.88 \times 10^{-6} < \epsilon$ となり積分は成功した．標本点数は 2238 点，分割数は 123 回であった．野田の領域分割の結果を図 4 に示す．我々の方法では $3.60 \times 10^{-9} < \epsilon$ となり，積分は成功した．この場合の標本点数は 569 点，分割数は 15 回である．領域分割の結果は図 5 に示す．

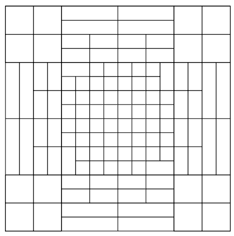


図 4 野田の分割結果

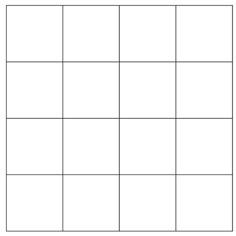


図 5 我々の分割結果

6 おわりに

長方形領域における数値積分において，精度の低い長方形領域を 2 つの小長方形領域に分割することを繰り返して，求める精度の近似積分を行う適応型積分則のアルゴリズムを作成した．我々は，基本積分則として新たに作成した 7 次のものを用いた．誤差評価と分割方向の決定については，随伴 5 次公式を用いて行う方法を考案した．

Mathematica によるプログラムを作成し数値実験を行った．数値実験の結果，7 次公式を用いた我々の方法は，3 次公式を用いた片峯 [2]，5 次公式を用いた野田 [3] の方法より使用標本点数が少なかった．2 変数ガウス関数の積分では許容誤差 10^{-4} で実験して標本点数は野田の約 1/4 であった．

7 参考文献

[1] 古田純也，長方形領域の再利用可能積分公式，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2012 年度卒業論文，2013.

[2] 片峯由莉香，長方形領域における 2 次元適応型積分則，南山大学数理情報学部情報システム数理学科 2011 年度卒業論文，2012.

[3] 野田健太，長方形領域における 2 次元 5 次適応型積分則，南山大学情報理工学部情報システム数理学科 2015 年度卒業論文，2016.