ゆで卵の倒立回転

2014SC070　杉山裕紀
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

下村裕とキース・モファットによれば, ゆで卵を高速回転させると立ち上がりの際, ゆで卵は飛び上がる．私はこのような興味深い現象に興味をもち，計算機シミュレーションにより様々な条件下で実験を行いその原理を探求したいと思った．そのためにまず床の上で回転するゆで卵の運動方程式をたてる．

その運動方程式を常微分方程式の方程式の標準形に変形し, それを数値的に解く事によりシミュレーションを実現する事を目指す．

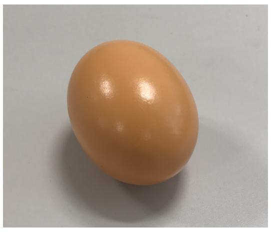

図 1　寝た状態

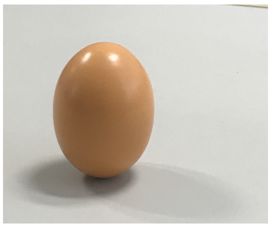

図 2　直立回転状態

2　ゆで卵の運動方程式

回転体のゆで卵を考える．ゆで卵の局所座標の原点を $\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$, 正規直交軸ベクトルを $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{s}=(s,t,u)$ はゆで卵の局所座標である．質量を m とする．重心を $\boldsymbol{r}=(r_x,r_y,r_z)$，その局所座標を $\boldsymbol{r}_L=(r_i,r_j,r_k)$ とする．

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{c}+r_i\boldsymbol{i}+r_j\boldsymbol{j}+r_k\boldsymbol{k}=\boldsymbol{c}+A\boldsymbol{r}_L, \quad (1)$$
$$A=(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})\in\mathbb{R}^3 \quad (2)$$

である．

ゆで卵は床の上を動摩擦係数 μ_1 で滑るものとする．重力加速度を $g=9.8[m/s^2]$ とする．以下のように記号を設定する．

床のゆで卵の接点： $\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,0)$,　$\boldsymbol{b}_{xy}=(b_x,b_y)$,
ゆで卵の床との接点： $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)=\boldsymbol{b}$,
$\boldsymbol{p}_{xy}=(p_x,p_y)$,
重心周りの角速度： $\boldsymbol{\omega}=(\omega_x,\omega_y,\omega_z)$,
重力ベクトル： $\boldsymbol{G}=(0,0,-mg)$,
床の抗力： $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$.

ゆで卵の運動は 6 つのベクトル $\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}=\dot{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega}$ の時間変化で記述される．これらを支配するのは並進運動の方程式, 摩擦の方程式, 回転運動の方程式

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{G}, \quad (3)$$
$$\dot{L}=\boldsymbol{N}=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{F}, \quad (4)$$
$$\boldsymbol{F}_{xy}=\mu_1F_z\frac{-\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}}{\|\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}\|} \quad (5)$$

である．これらを従属変数

$$\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{v},\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k},\boldsymbol{\omega}) \quad (6)$$

とする常微分方程式の標準形

$$\dot{\boldsymbol{x}}=f(t,\boldsymbol{x}) \quad (7)$$

を導き, 常微分方程式の数値解法を用いていることにより, 数値シミュレーションを実現することができる．

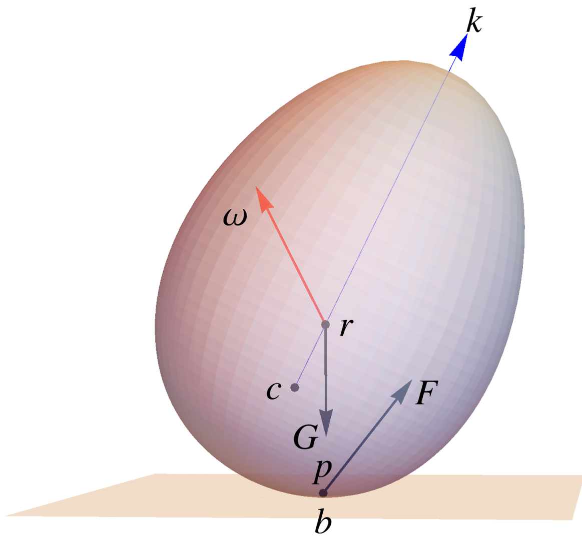

図 3　ゆで卵のモデル図

まず,

$$\dot{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{v} \quad (8)$$

である．また，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はゆで卵に固定されたベクトルだから，

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i} \\ \dot{\boldsymbol{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j} \\ \dot{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{9}$$

である．従って，$\dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ 計算法を述べれば目的は達成される．ここでは $\dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{i}}, \ddot{\boldsymbol{j}}, \ddot{\boldsymbol{k}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{F}$ を求める線形連立方程式を導く．それを数値的に解くことで $\dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ が計算できる．

2.1 並進運動の方程式

ゆで卵の姿勢と位置は，$\boldsymbol{b}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ で決まるので，
ベクトル $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k})$ で，局所座標原点の位置 $\boldsymbol{c}$ が決まる．

簡単のため，$\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_{12})^T \in \mathbb{R}^{12}$ と書き，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}_i &= \frac{\partial \boldsymbol{c}}{\partial y_i} (1 \le i \le 12), \\ \boldsymbol{c}_{ij} &= \frac{\partial^2 \boldsymbol{c}}{\partial y_i \partial y_j} (1 \le i \le 12,\ 1 \le j \le 12) \end{aligned}$$

とする．このとき，微分の連鎖律より

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{c}} &= \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \dot{y}_i, \\ \ddot{\boldsymbol{c}} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \ddot{y}_i \end{aligned} \tag{10}$$

である．

ここで (1) より

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\boldsymbol{c}} + \dot{A} \boldsymbol{r}_L, \\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= \ddot{\boldsymbol{c}} + \ddot{A} \boldsymbol{r}_L \end{aligned} \tag{11}$$

である．式 (10),(11) と並進運動の方程式 (3) より，

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{c}_{ij} \dot{y}_i \dot{y}_j + \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{c}_i \ddot{y}_i + \ddot{A} \boldsymbol{r}_L = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}. \tag{12}$$

である．$\ddot{A} = (\ddot{\boldsymbol{i}}, \ddot{\boldsymbol{j}}, \ddot{\boldsymbol{k}})$ より (12) は $\dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{i}}, \ddot{\boldsymbol{j}}, \ddot{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{F}$ の線形方程式である．

また，座標軸ベクトルの 2 階導関数

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{i}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{i}, \\ \ddot{\boldsymbol{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{j}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{j}, \\ \ddot{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{k} \end{aligned} \tag{13}$$

より $\ddot{\boldsymbol{i}}, \ddot{\boldsymbol{j}}, \ddot{\boldsymbol{k}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ の線形方程式が得られる．

2.2 回転運動の方程式

I_0 を局所座標における重心を中心とする慣性モーメントテンソル (定数行列) とする．大域座標における重心周りの慣性モーメントテンソルは

$$I = A I_0 A^T$$

である．これを微分して

$$\dot{I} = \dot{A} I_0 A^T + A I_0 \dot{A}^T \tag{14}$$

である．これは未知ベクトルを含まない．

回転運動の方程式 (4) と

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= I\omega, \\ \dot{L} &= \dot{\boldsymbol{I}} \boldsymbol{\omega} + I \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{aligned}$$

より

$$\dot{I} \boldsymbol{\omega} + I \dot{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{F} \tag{15}$$

となる．(15) は $\boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ の線形方程式である．

2.3 摩擦の方程式

$\boldsymbol{p}$ は床とゆで卵との接点である．$\boldsymbol{p}$ の速度 $\dot{\boldsymbol{p}}$ は，重心の速度と重心周りの回転速度の合成だから，

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}).$$

右辺は未知ベクトルを含まない．$\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}$ は，$\dot{\boldsymbol{p}}$ の床と平行な成分である．そして，摩擦力の方程式は，

$$\boldsymbol{F}_{xy} = \mu_1 F_z \frac{-\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}}{\|\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}\|} \tag{16}$$

これは $\boldsymbol{F}$ の成分の線形方程式である．

最後にゆで卵は床と離れないので，

$$\dot{v_z} = 0 \tag{17}$$

以上で、変数ベクトル $\dot{\boldsymbol{v}}, \ddot{\boldsymbol{i}}, \ddot{\boldsymbol{j}}, \ddot{\boldsymbol{k}}, \dot{\boldsymbol{\omega}},\ \boldsymbol{F}$ の成分に対する１８本の方程式（12）（13）（15）（16）（17）が得られた．これらを連立させ, 数値的に解けば $\dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ が計算できる．

3 おわりに

本研究ではゆで卵の運動を解明するため, 剛体力学について学び，それによりゆで卵の状態を表す微分方程式を導出した．並進運動の運動方程式, 重心周りの回転の方程式および摩擦の方程式からゆで卵の運動方程式を導き，最後に運動方程式が常微分方程式の標準形に変形できることを示した．これよりゆで卵の運動を数値シミュレーションすることが可能となった．残念ながら時間不足のため, シミュレーションプログラムの完成には至らなかったため, 数値シミュレーションは今後の課題として残った．

参考文献

[1] 近藤凌：「コマの運動のシミュレーション」，南山大学情報理工学部卒業論文 (2016)．井上巧一：「逆立ちゴマの運動のシミュレーション」，南山大学情報理工学部卒業論文 (2017)．

[2] 十河清・和達三樹・出口哲生：「ゼロからの力学 II 」．岩波書店，東京（2013）．