ラトルバックの力学的シミュレーション

2014SC056 中村拓都

指導教員：杉浦洋

1　はじめに

通常，滑らかな剛体を机上で水平に回すと，回転の方向によらず滑らかに回転し続ける．ところがラトルバックと呼ばれる物は特定の方向に回りやすい性質を持っており，逆方向に回した場合，回転が不安定化してガタガタという縦揺れの振動 (rattle) が起こり，いったん回転を止めた後，はじめとは逆に回り始める．この様な，ラトルバックの特異な運動に興味を持った．ラトルバックの運動方程式を調べ，常微分方程式の標準形を導く．

ラトルバックの運動を支配しているのは剛体力学である．本研究では剛体力学について詳しく学び，それによりラトルバックの状態を表す微分方程式を導出する．その微分方程式を等価な標準方程式に変換する．標準方程式は，常微分方程式の数値解法を用いて数値的に解くことができ，コンピュータ上でラトルバックの運動のシミュレーションが行える．これにより様々な条件下でラトルバックの運動を詳しく調べることができる．

2　ラトルバックの運動方程式

重心の並進運動の方程式と重心周りの回転運動の方程式，および床とラトルバックの摩擦の方程式から，ラトルバックの運動を支配する微分方程式の標準形を導く．楕円体を高さ H で切断したラトルバック

$$S : f(\boldsymbol{s}) = \frac{s^2}{\alpha^2} + \frac{t^2}{\beta^2} + \frac{u^2}{\gamma^2} - 1 \leq 0, \quad -\gamma \leq u \leq H \quad (1)$$

を考える．ラトルバックの局所座標の原点を $\boldsymbol{c} = (c_x, c_y, c_z)$，正規直交軸ベクトルを $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ とする．$\boldsymbol{s} = (s, t, u)$ はラトルバックの局所座標である．質量を m とする．重心を $\boldsymbol{r} = (r_x, r_y, r_z)$，その局所座標を $\boldsymbol{r}_L = (r_i, r_j, r_k)$ とする．

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{c} + r_i\boldsymbol{i} + r_j\boldsymbol{j} + r_k\boldsymbol{k} = \boldsymbol{c} + A\boldsymbol{r}_L, \quad (2)$$

$$A = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}) \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad (3)$$

である．I_0 を局所座標における重心を中心とする慣性モーメントテンソルとする．大域座標における重心周りの慣性モーメントテンソルは

$$I = AI_0A^T \quad (4)$$

である．

ラトルバックは床の上を動摩擦係数 μ_1 で滑るものとする．重力加速度を $g = 9.8[m/s^2]$ とする．以下のように記号を設定する．

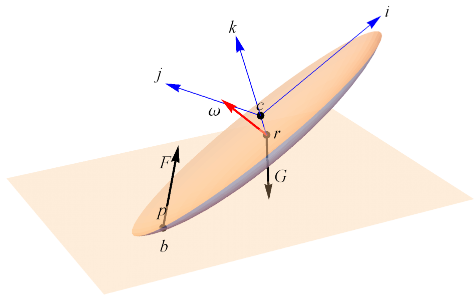

図 1　ラトルバックのモデル図

床のラトルバックの接点: $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, 0)$，　$\boldsymbol{b}_{xy} = (b_x, b_y)$，

ラトルバックの床との接点： $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) = \boldsymbol{b}$,

$\boldsymbol{p}_{xy} = (p_x, p_y)$,

重心周りの角速度： $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$,

重力ベクトル： $\boldsymbol{G} = (0, 0, -mg)$,

床の抗力： $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$

ラトルバックの並進運動の方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}, \quad (5)$$

回転運動の方程式は

$$\dot{L} = \boldsymbol{N} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{F}, \quad (6)$$

摩擦の方程式は

$$\boldsymbol{F}_{xy} = \mu_1 F_z \frac{-\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}}{\|\dot{\boldsymbol{p}}_{xy}\|} \quad (7)$$

である．

ラトルバックの運動は 6 つのベクトル $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{b}}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\omega}$ の時間変化で記述される．これらを従属変数

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\omega}) \quad (8)$$

とする時間に関する微分方程式

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(t, \boldsymbol{x}) \quad (9)$$

を具体的に構成する．すなわち，$\dot{\boldsymbol{b}}, \dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{i}}, \dot{\boldsymbol{j}}, \dot{\boldsymbol{k}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ を $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}, \boldsymbol{\omega}$ により計算する方法を具体的に示す．

2.1　位置と局所座標軸ベクトルの微分

まず，

$$\dot{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{v} \quad (10)$$

である．また，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ はラトルバックに固定されたベクトルだから，

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \\
\dot{\boldsymbol{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}, \\
\dot{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k},
\end{aligned} \tag{11}
$$

である．以下，$\dot{\boldsymbol{b}}, \dot{\boldsymbol{i}}, \dot{\boldsymbol{j}}, \dot{\boldsymbol{k}}$ は既知量と考える．

2.2　速度と加速度の関係式

床のラトルバックとの接点 $\boldsymbol{b}$ の局所座標を $\boldsymbol{b}_L = (b_i, b_j, b_k)$ とすると，

$$
\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} + A\boldsymbol{b}_L = \boldsymbol{c} + b_i\boldsymbol{i} + b_j\boldsymbol{j} + b_k\boldsymbol{k}. \tag{12}
$$

$\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{b}$ で表すと，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{c} + A\boldsymbol{r}_L, \\
\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{c} + A\boldsymbol{b}_L
\end{aligned}
$$

だから，$\boldsymbol{r}$ と $\boldsymbol{b}$ の両式から $\boldsymbol{c}$ を消去すると，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r} - \boldsymbol{b} &= A(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L), \\
\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{b} + A(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L).
\end{aligned} \tag{13}
$$

ラトルバックの速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ を求める．$\boldsymbol{r}_L$ は定ベクトルだから，

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{r}} &= \boldsymbol{v} + \dot{A}(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L) + A(\dot{\boldsymbol{r}}_L - \dot{\boldsymbol{b}}_L) \\
&= \boldsymbol{v} + \dot{A}(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L) - A\dot{\boldsymbol{b}}_L.
\end{aligned} \tag{14}
$$

ラトルバックの加速度 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ は，

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{r}} &= \dot{\boldsymbol{v}} + \ddot{A}(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L) + \dot{A}(\dot{\boldsymbol{r}}_L - \dot{\boldsymbol{b}}_L) - \dot{A}\dot{\boldsymbol{b}}_L - A\ddot{\boldsymbol{b}}_L \\
&= \dot{\boldsymbol{v}} + \ddot{A}(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L) - 2\dot{A}\dot{\boldsymbol{b}}_L - A\ddot{\boldsymbol{b}}_L
\end{aligned} \tag{15}
$$

である．

(11) を微分して，座標軸ベクトルの 2 階導関数は

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{i}} &= \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{i}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{i}, \\
\ddot{\boldsymbol{j}} &= \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{j}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{j}, \\
\ddot{\boldsymbol{k}} &= \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{16}
$$

である．

2.3　並進運動の方程式の解析

(5) に (15) を代入して，(11)，(16) より，

$$
m(\ddot{\boldsymbol{b}} + \ddot{A}(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L) - 2\dot{A}\dot{\boldsymbol{b}}_L - A\ddot{\boldsymbol{b}}_L) = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G} \tag{17}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{A} &= (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{j}, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}) \\
\ddot{A} &= (\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{i}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{i}, \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{j}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{j}, \boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{k}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{k}).
\end{aligned}
$$

ゆえに，ベクトル $A_0(\boldsymbol{r}_L - \boldsymbol{b}_L)$ の要素は $\dot{\omega}$ の成分の一次式である．

床とラトルバックの接点 $\boldsymbol{b}$ の局所座標を求めると

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_L &= (b_i, b_j, b_k) = (\frac{\alpha^2 i_z}{2}q, \frac{\beta^2 j_z}{2}q, \frac{\gamma^2 k_z}{2}q) \\
q &= -\frac{2}{\sqrt{\alpha^2 i_z^2 + \beta^2 j_z^2 + \gamma^2 k_z^2}}
\end{aligned}
$$

となる．これより，$\dot{\boldsymbol{b}}_L$ は既知量 $\dot{i}_z, \dot{j}_z, \dot{k}_z$ の一次式であり，未知量を含まない．また，$\ddot{\boldsymbol{b}}_L$ は未知量 $\ddot{i}_z, \ddot{j}_z, \ddot{k}_z$ の一次式であるから，(16) の成分の一次式である．

以上より，$\dot{A}\dot{\boldsymbol{b}}_L$ は，未知関数を含まない．また，$\ddot{i}_z, \ddot{j}_z, \ddot{k}_z$ は (16) より，$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ の成分の一次式である．したがって，ベクトル $A\ddot{\boldsymbol{b}}_L$ の要素は，$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ の成分の一次式である．

以上により，並進運動の方程式 (17) はベクトル $\dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{F}$ の成分の線形方程式である．

2.4　回転運動の方程式の解析

(6) と $\dot{L} = \dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} + I\dot{\boldsymbol{\omega}}$ より，

$$
\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{\omega} + I\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{F} \tag{18}
$$

となるから，(18) の右辺ベクトルの成分は，$\boldsymbol{F}$ の要素の一次式である．

(4) を微分して，

$$
\dot{I} = \dot{A}I_0A^T + AI_0\dot{A}^T
$$

となるから，(18) の左辺ベクトルの成分は，$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ の要素の一次式である．

以上より，回転運動の方程式 (18) は，$\boldsymbol{F}, \dot{\boldsymbol{\omega}}$ の成分の線形方程式である．

2.5　常微分方程式の基本形の構成

以上により，$\dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{F}$ の成分に関する線形方程式 (17), (18) が導かれた．これと $\boldsymbol{F}$ の成分に関する線形方程式である (7) を連立させて，$\dot{\boldsymbol{v}}, \dot{\boldsymbol{\omega}}, \boldsymbol{F}$ を求める．

3　おわりに

本研究では，ラトルバックの不思議な運動を解明するため，ラトルバックの運動の観察，スプーン・ラトルバックの作成を行い，また，ラトルバックの運動方程式の解析とそれに基づく数値シミュレーションを目指した．

ラトルバックの運動を床の上で滑りながら回転する剛体の運動とみなし，重心の並進運動方程式，重心周りの回転運動方程式及び動摩擦方程式を解析し，状態量に関する常微分方程式の基本形を導いた．これにより，常微分方程式の数値解法を用いて，ラトルバックの運動を数値シミュレーションすることが可能となった．しかしながら，数値シミュレーションのための計算機プログラムを完成させる時間的な余裕がなく，数値シミュレーションは今後の課題として残った．

参考文献

[1] 十河清・和達三樹・出口哲生：「ゼロからの力学 I II」．岩波書店，東京（2013）．