What-if-not strategy による大学入試問題の発展的考察

2014SE110 山本祐暉

指導教員: 佐々木克巳

1　はじめに

本研究の目的は，大学入試で出題された問題を what-if-not strategy を用いて問題を作り変え，問題の計算量と難易度を比較し考察することで，高校数学に対する理解をより一層深めることである．ここで what-if-not strategy とは，1 つの問題に対して“もしそうでなかったら”を考えることによって，問題の理解を深める手法である ([1])．本研究ではこの手法を問題文の条件の作り変えとして適用する．扱った問題は [2] の 7 題で本稿ではそのうちの問題 37 の前半を示す．以下の 2 節で発展的考察の結果を示し，3 節で計算量と難易度を比較した結果を示す．

2　双曲線の問題の発展的考察

この節では，[2] の問題 37 の前半に対する，問題の作り変えによる考察を示す．もとの問題を以下に示す．

問題．座標平面上に, 双曲線 C :$x^2 - y^2 = 1$ と点 $\mathrm{A}(2, 0)$ がある．点 A を通り双曲線 C と 1 点のみで交わる直線を求めよ．

本稿では，この問題の「 $\mathrm{A}(2, 0)$」を「 $\mathrm{A}(a, b)$」,「 で交わる」を「 を共有する」に置き換えた問題を考える (図 1).

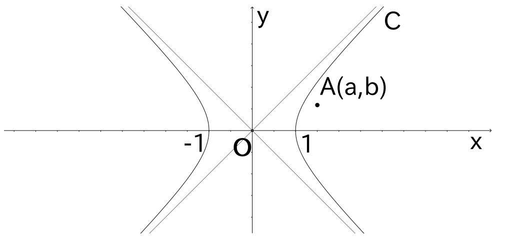

図 1　問題作り変え後の図

作りかえた問題の略解．点 $\mathrm{A}(a, b)$ を通る直線は $x = a$, または $y = m(x - a) + b$ と表せる．

(1)$x = a$ のとき： $a = 1, -1$ のときだけ $x = a$ は求める直線である．

(2)$y = m(x - a) + b$ のとき： C に代入して，整理すると，

$$x^2 - \{m(x - a) + b\}^2 = 1$$

$$(1 - m^2)x^2 + 2(m^2 a - mb)x - (m^2 a^2 - 2mab + b^2 + 1) = 0 \quad (*1)$$

となる．$(*1)$ の解が 1 つに定まれば直線 $y = m(x - a) + b$ と C の交点が 1 つに定まる．よって $(*1)$ の解が 1 つに定まるような m を求めれば，求める直線は $y = m(x - a) + b$ にその m を代入すればよい．

(2.1)$m = 1$ のとき： $(*1)$ に $m = 1$ を代入して

$$2(a - b)x = a^2 - 2ab + b^2 + 1$$

$$x = \frac{(a - b)^2 + 1}{2(a - b)} (\text{ただし } a \neq b)$$

つまり，$a \neq b$ のときは $(*1)$ の解が 1 つに定まるが，$a = b$ のときは $(*1)$ は解を持たない ($y = (x - a) + b$ が双曲線の漸近線となる)．

よって $a \neq b$ のときだけ求める直線が存在して，$y = (x - a) + b$ である．

(2.2)$m = -1$ のとき： (2.1) と同様に，$a \neq -b$ のときだけ求める直線が存在して，$y = -(x - a) + b$ である．

(2.3)$1 - m^2 \neq 0$ のとき： $(*1)$ の判別式を D_1 とすると

$$D_1/4 = (a^2 - 1)m^2 - 2mab + b^2 + 1$$

であり，$D_1/4 = 0 \Longleftrightarrow$「 $(*1)$ の解が 1 つに定まる」が成り立つ．だから，$D_1/4 = 0$ を満たす m を求めればよい．以下，$D_1/4 = 0$ の m^2 の係数により場合分けして求める．

(2.3.1) $a^2 \neq 1$ のとき： $D_1/4 = 0$ を m についての 2 次方程式と考え，その判別式を D_2 とすると

$$D_2/4 = (b^2 - a^2) + 1$$

となる．ここで $D_2/4$ の符号による場合分けを行う．

(2.3.1.1)$D_2/4 < 0$, すなわち $a^2 - b^2 > 1$ のとき: $D_1/4 \neq 0$ であり $D_1/4 = 0$ を満たす m は存在しない．

よって $a^2 - b^2 > 1$ のとき求める直線は存在しない．

(2.3.1.2)$D_2/4 = 0$，すなわち $a^2 - b^2 = 1$ のとき： $a^2 \neq 1$ より $b \neq 0$ で，$a^2 - 1 = b^2$ より，

$$D_1/4 = (bm - a)^2$$

だから，$D_1/4 = 0$ を満たす m は $m = \dfrac{a}{b}$ である．この m は，$1 - m^2 = 1 - (\dfrac{a}{b})^2 = -\dfrac{1}{b^2}$ なので $1 - m^2 \neq 0$ を満たしている．

よって $a^2 \neq 1, a^2 - b^2 = 1$ のとき，求める直線は $y = \dfrac{a}{b}(x - a) + b$ である．

(2.3.1.3)$D_2/4 > 0$, すなわち $a^2 - b^2 < 1$ のとき: $D_1/4 = 0$ を満たす m は

$$m = \frac{ab \pm \sqrt{b^2 - a^2 + 1}}{a^2 - 1}$$

である．ここで $m^2 = 1$ かつ $D_1/4 = 0$ のとき $a = b$ または $a = -b$ だから，$a \neq b$ かつ $a \neq -b$ のときこの 2 つの m は $m^2 \neq 1$ を満たす.「 $a \neq b$ かつ $a \neq -b$」でない場合は以下の通りである．

$a=b\neq 0$のとき: $D_1/4=0$を満たすmは$m=1,\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$となるが，$m^2\neq 1$より $m=\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$である．

$a=-b\neq 0$のとき: $D_1/4=0$を満たすmは$m=-1,-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$となるが，$m^2\neq 1$より，$m=-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}$である．

$a=b=0$のとき: $D_1/4=0$を満たすmは$m=1,-1$となるが，どちらも$m^2\neq 1$を満たさない．

以上より $a^2\neq 1, a^2-b^2<1$のとき求める直線は

- $a\neq b, a\neq -b$で$y=\dfrac{ab\pm\sqrt{b^2-a^2+1}}{a^2-1}(x-a)+b$
- $a=b\neq 0$で$y=\dfrac{a^2+1}{a^2-1}(x-a)+b$
- $a=-b\neq 0$で$y=-\dfrac{a^2+1}{a^2-1}(x-a)+b$
- $a=b=0$の場合は存在しない．

(2.3.2)$a^2=1$つまり $a=\pm 1$のとき:

$$D_1/4=\begin{cases} -2mb+b^2+1 & (a=1)\\ 2mb+b^2+1 & (a=-1)\end{cases}$$

である．$b=0$のとき$D_1/4=1>0$なので$D_1/4=0$のとき$b\neq 0$で$D_1/4=0$を満たすmは.

$$m=\begin{cases} \dfrac{b^2+1}{2b} & (a=1)\\ -\dfrac{b^2+1}{2b} & (a=-1)\end{cases}$$

である．

よって，$a=1$のとき求める直線は$y=\dfrac{b^2+1}{2b}(x-1)+b$, $a=-1$のとき$y=-\dfrac{b^2+1}{2b}(x+1)+b$である． ■

以上より，求める直線の候補は

$$y=\pm(x-a)+b \quad (C\text{の漸近線に平行な直線})$$

$$y=\frac{ab\pm\sqrt{b^2-a^2+1}}{a^2-1}(x-a)+b\text{または}y=\pm a$$

(Cに接する直線)

で，これらはAの位置によって求める直線となるかどうかが決まる．Aの位置は次の5通りに分ける．

(i) 原点
(ii) 漸近線$y=\pm x$上 (原点を除く)
(iii) 領域$\{(x,y)|x^2+y^2<1, x\neq y, x\neq -y\}$内
(iv)C上
(v) 領域$\{(x,y)|x^2+y^2>1\}$内

上の5つの各位置に対して，求める直線の候補のうち，何本が求める直線となるかを表1にまとめておく．

表1 点Aの位置と引ける直線の数の対応表

点Aの位置	(i)	(ii)	(iii)	(iv)	(v)
Cの漸近線に平行な直線	0	1	2	2	2
Cに接する直線	0	1	2	1	0
合計	0	2	4	3	2

3 難易度と計算量の比較

この節では，点Aの位置が前節の5つの場合についてその計算量と難易度をもとの問題と比較した結果を示す．具体的に直線が4本引ける場合，つまり，点Aが(iii)の位置(双曲線の内側かつ漸近線の上にない場合)が一番計算量が多く，問題として難しいように感じた．表2に他の場合の比較した結果をまとめておく．表2においてもとの問題は(v)に該当する．

参考文献

[1] S.I. ブラウン,M.I. ワルター著 平林一榮監訳:『いかにして問題を作るか-問題設定の技術』. 東洋館出版，東京，1990.

[2] 大竹真一編著:『名古屋大の理系数学15ヵ年[第4版]』. 教学社，京都，2015.

表2 作り変えた問題の計算量と難易度の変化を示した表

点Aの位置	求める直線の本数	計算量の変化	難易度の変化
(i)	0	×	×
(ii)	2	元の問題に加え接線の方程式を1本求める必要がある	やや難しくなった
(iii)	4	元の問題に加え1点のみで交わる直線を2本求める必要がある	難しくなった
(iv)かつ$a=\pm 1$	3	ほぼ変わらず	ほぼ変わらず
(iv)かつ$a\neq\pm 1$	3	元の問題に加え接線の方程式を1本求める必要がある	やや難しくなった
(v)	2	変わらず	変わらず