一部の対を比較する場合の多重比較の研究

2014SS069 尾﨑友彦

指導教員：松田眞一

1 はじめに

本研究では，Bonferroni の方法が Tukey の方法よりも検出力が高くなるデータの条件を調べる．また，シミュレーションを用いて，Bonferroni の方法，Tukey の方法，それらの多段階法である Holm の方法，Tueky-Welsch の方法，Peritz の方法の検出力の比較を行う．

2 研究で用いる多重比較法について

Bonferroni の方法は，ファミリーに属する帰無仮説の個数を数えて，個々の検定における有意水準を調整し，棄却域を決定する方法である．また，Bonferroni の方法は，多重検定法であり，設定する帰無仮説は対比較でなくてもよく，対比で表現されているものや，それ以外でもよい．Holm の方法は，Bonferroni の方法の p 値との比較に使用する有意水準の値を調整して Bonferroni の方法よりも検出力を高くしたものである．これらの方法の詳しい説明，及び，Tukey の方法，Tukey-Welsch の方法，Peritz の方法の説明は永田・吉田 [1] を参照していただきたい．

3 Bonferroni の方法と Tukey の方法の棄却限界値の比較

3.1 比較方法について

Bonferroni の方法と Tukey の方法について，それぞれの検出力を比較するために，母集団分布は正規分布，すべての群を通して母分散は等しい，すべての群の標本サイズが等しい，群の数を 3 群以上，有意水準 5% という，条件のもとで，棄却限界値の比較を行った．

Bonferroni の方法で Tukey の方法と同様にすべての群について比較を行った場合，Tukey の方法の方が検出力が高くなることが知られている．そこで，本研究では Bonferroni の方法を Tukey の方法よりも検出力が高くする手段として，群間の総対数を減らすことで，棄却限界値を小さくすることを採用した．

総対数を減らす際の例外として Dunnett の方法が適用できる場合と孤立群が存在する場合を設定した．

3.2 比較結果

表 2 は，標本サイズ 10 の場合に第 3∼9 群の場合について，Bonferroni の方法の総対数に応じた棄却限界値を表示し，Bonferroni の方法の検出力が Tukey の方法の検出力を上回るようになった境界を示したものである．Bonferroni の方法の棄却限界値が Tukey の方法の棄却限界値を下回っている範囲を **太字**，Dunnett の方法が適用できる範囲を <u>下線</u>，孤立群が存在する範囲を斜体で表現した．

また，標本サイズを 10，20，30，50，100，無限に変更し，棄却限界値の比較した結果，標本サイズが大きくすることで，一部の群数について，Bonferroni の方法が Tukey の方法よりも棄却限界値が小さくなるために削る対の数が少なくなる結果が得られた．第 3∼9 群について，Bonferroni の方法が Tukey の方法の棄却限界値よりも小さくなるために必要な対の数が変化する境界の標本サイズの値をまとめた表が表 1 となる．最大の対の数とは Bonferroni の方法が Tukey の方法よりも検出力が高くなる場合で最も対の数が多い数値を表す．

表 1 対の数が変化する境界

群数	境界の標本サイズ	最大の対の数
3	変化しない	-
4	変化しない	4
5	変化しない	7
6	15	10, 11
7	14	14, 15
8	23	19, 20
9	15	24, 25

すなわち，例えば 6 群の場合は標本サイズ $n = 14$ までなら総対数 $k \leq 10$ でないと Bonferroni の方法の方が検出力が高くならないが，$n = 15$ からは $k \leq 11$ で高くなるということである．

4 シミュレーション

Bonferroni の方法，Holm の方法，Tukey の方法，Tukey-Welsch の方法，Peritz の方法について，それらの検出力を比較するために，R を用いて再現性のある正規乱数データを生成してシミュレーションを行い，松田・永田 [4] を参考に any-pair power，all-pairs power の比較を行った．any-pair power とは，母平均間に差のある対を少なくとも 1 つ検出する確率を意味し，all-pairs power とは，母平均間に差があるすべての対を検出する確率を意味する．

比較に用いた Bonferroni の方法，Holm の方法のプログラムは自作したのものを使用した．Tukey の方法，Tukey-Welsch の方法のプログラムは堀内 [2]，Peritz の方法のプログラムは堀内 [3] のものを使用した．

また，本研究ではすべての乱数データは群数 5，標本サイズ 10，分散 1，有意水準 5% とした。

4.1 any-pair power の検出力の比較

すべての群の平均が 0 で，すべてが帰無仮説の乱数データ a，群ごとに平均が 1 から 0.3 ずつ線形的に上昇する，すべてが対立仮説の乱数データ b，第 1 群と第 2 群の平均が 0，第 3 群の平均が 0.5，弾 4 群と第 5 群の平均が 1 の

表 2 Bonferroni と Tukey の棄却限界値の比較 (標本サイズ 10 の場合)

群数	Tukeyの限界値	Bonferroniの総対数																			
		36	⋯	28	⋯	24	⋯	19	⋯	15	14	⋯	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
3	2.479																			2.552	2.373	*2.052*
4	2.693																2.791	2.719	**2.629**	2.511	*2.339*	*2.028*
5	2.841												2.952	2.913	2.869	**2.819**	**2.760**	**2.690**	2.602	*2.487*	*2.319*	*2.014*
6	2.954									3.071	3.047	⋯	**2.927**	**2.889**	**2.846**	**2.796**	*2.739*	2.670	*2.584*	*2.471*	*2.301*	*2.004*
7	3.046							3.132	⋯	3.051	**3.027**	⋯	**2.909**	**2.871**	**2.829**	**2.780**	2.724	*2.656*	*2.571*	*2.460*	*2.296*	*1.998*
8	3.122			3.245	⋯	3.194	⋯	**3.116**	⋯	**3.036**	**3.013**	⋯	**2.896**	**2.859**	**2.817**	2.769	*2.713*	*2.646*	*2.562*	*2.451*	*2.289*	*1.993*
9	3.187	3.311	⋯	3.231	⋯	**3.181**	⋯	**3.104**	⋯	**3.025**	**3.001**	⋯	**2.886**	**2.849**	2.808	*2.760*	*2.705*	*2.638*	*2.555*	*2.445*	*2.283*	*1.990*

帰無仮説と対立仮説が混じった乱数データ c でのシミュレーションをそれぞれ 1000 回行った．Bonferroni の方法，Holm の方法，Tukey の方法，Tukey-Welsch の方法で，乱数データ a で 1 箇所でも帰無仮説が棄却されたデータの割合，乱数データ b で 1 箇所でも対立仮説が棄却されたデータの割合，乱数データ c で 1 箇所でも帰無仮説が棄却されたデータの割合と 1 箇所でも対立仮説が棄却されたデータの割合をそれぞれ表したものが表 3 である．

表 3 any-pair power の結果

棄却されたデータの割合	a 帰無	b 対立	c 帰無	c 対立
Bonferroni	0.036	0.520	0.011	0.527
Holm	0.036	0.520	0.016	0.527
Tukey	0.044	0.578	0.017	0.578
Tukey-Welsch	0.044	0.578	0.039	0.578

4.2 all-pairs power の検出力の比較

all-pairs power は，any-pair power のシミュレーションで用いた程度のデータではほとんど棄却されないため，群の平均を，正確な差が見られる値に再度調整した．

群ごとに平均が 1 から 1.5 ずつ線形的に上昇する，乱数データ d，第 1 群と第 2 群の平均が 0，第 3 群の平均が 1.5，弾 4 群と第 5 群の平均が 3 の帰無仮説と対立仮説が混じった乱数データ e でのシミュレーションをそれぞれ 1000 回行った．Bonferroni の方法，Holm の方法，Tukey の方法，Tukey-Welsch の方法，Peritz の方法，2 対削った Holm の方法，1 対削った Holm の方法で，乱数データ d の場合はすべての対立仮説が棄却されたデータの割合，乱数データ e の場合は 1 箇所でも帰無仮説が棄却されたデータの割合と対立仮説がすべて棄却されたデータの割合を表したものが表 4 である．Holm の方法の対数を 2 つ削った場合は帰無仮説が存在しないため，データなしとなる．

4.3 検出力の比較のまとめ

上記の結果から，いずれのデータでも，Bonferroni の方法よりも Tukey の方法の方が棄却されるデータの数が多く，Tukey の方法の方が検出力が高いことが考えられる．

表 4 all-pairs power の結果

棄却されたデータの割合	d 対立	e 帰無	e 対立
Bonferroni	0.123	0.011	0.176
Holm	0.656	0.045	0.421
Tukey	0.172	0.017	0.234
Tukey-Welsch	0.411	0.043	0.449
Peritz	0.642	0.065	0.454
Holm(2 対削る)		-	0.676
Holm(1 対削る)		0.042	0.515

また，any-pair power では Bonferroni の方法と Holm の方法，Tukey の方法と Tukey-Welsch の方法での棄却されるデータの数は同じで，any-pair power では多段階法のメリットは全くないことが考えられる．

all-pairs power ではデータによって Holm の方法と Tukey-Welsch の方法の検出力の大小は変化することが考えられる．母平均が階段状に変化するデータでは，Holm の方法の方が高い．一方，母平均が 2 分されるような平坦なデータでは，Tukey-Welsch の方法の方が検出力が高くなる．また，5 群 10 例の場合は，Holm の方法の対を 1 つでも削ると Holm の方法の方が検出力が高くなる．

5 おわりに

Bonferroni の方法と Tukey の方法の検出力を比較し，その多段階法である Holm の方法と Tukey-Welsch の方法の比較もシミュレーションによって行うことができた．

参考文献

[1] 永田靖・吉田道弘：「統計的多重比較法の基礎」，サイエンティスト社，1997.

[2] 堀内賢太郎：「R による多重比較法の研究」，南山大学数理情報学部数理学科卒業論文，2004.

[3] 堀内賢太郎：「多重比較法の最近の動向の研究」，南山大学大学院数理情報研究修士論文，2006.

[4] 松田眞一・永田靖：「多重比較における新たな検出力の提案と各手法の特徴比較」，応用統計学 Vol.19 No. 2，pp.93-113，1990.