ロバスト最適化を用いた捜索計画問題
—期待報酬を最大にする努力配分問題—

2014SS064 岡田嵩史

指導教員：福嶋雅夫

1 はじめに

捜索計画問題は，捜索において，どこを，どれだけ，どのような順序で，いつまで，探すか，といった捜索の計画を考えるうえで重要な役割を果たす．特に，捜索資源 (捜索努力量) を独立変数とし，捜索計画の評価尺度を目的関数として，捜索資源のいくつかの制約条件の下で最適化する条件付き最適化問題を最適努力配分問題といい，数理計画法や変分法等の最適化の数学手法を適用して解が求められる [1].

本研究では，期待報酬を評価尺度として捜索努力配分問題を定式化し最適化を行う．問題を解くにあたり，目標が存在する確率が必要であるが，現実問題において，目標が存在する確率は正確に分からないのが普通であるため不確実性を考慮しなければならない．ここで目標存在確率の不確実性を考慮するにあたり，ロバスト最適化の手法を取り入れて，最適化を行う [3][4].

2 期待報酬を最大にする努力配分問題

目標を発見したときに得られる報酬の期待値を最大にする捜索努力配分問題を考える．

2.1 目標存在確率

捜索者は地域 $i(i = 1, 2, ..., n)$ のどこかに存在する 1 つの静止目標を捜索する．各地域に目標が存在している確率がおよそ推定できるとき，この確率を目標存在確率という．ここでは地域 i における目標存在確率を p_i と表す．そのとき次式が成り立つ．

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \quad p_i > 0 \quad (i = 1, 2, .., n)$$

2.2 捜索努力量と捜索コスト

捜索において目標を発見するために投入される資源の投入量を捜索努力量といい，捜索にかかる費用を捜索コストという．捜索者が第 t 日 $(t = 1, 2, ..., m)$ に地域 i へ投入する捜索努力量を $r_i(t)$，地域 i での単位努力あたりのコストを c_i と表すと，一日あたりの捜索コストは

$$\sum_{i=1}^{n} c_i r_i(t), \quad r_i(t) \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

と表せる．また，第 t 日までに地域 i に投入した累積努力量を $s_i(t)$ とすると次式が成り立つ．

$$s_i(t) = \sum_{\tau=1}^{t} r_i(\tau)$$

2.3 目標発見確率

地域 i に目標が存在するとき，その地域に累積努力量 $s_i(t)$ が投入されたときに目標が発見される確率を $f_i(s_i(t))$ とする．関数 f_i は次の条件をみたすと仮定する．

$$\begin{aligned} f_i(0) = 0, &\quad f_i(s_{\max}) = 1, \\ f_i'(s) > 0 &\quad s \in [0, s_{\max}), \\ f_i''(s) < 0 &\quad s \in [0, s_{\max}) \end{aligned}$$

ただし，$s_{\max}$ は正定数である．これを限界効用逓減の法則といい，投入される努力量が増えるにつれて，目標を発見できる確率の増加分は少なくなることを意味する．

3 努力配分問題の定式化

第 t 日においてどこかの地域で目標を発見したときに報酬 $R(t)$ が得られるとする．そのとき，目標を発見して得られる報酬の期待値は次式で与えられる．

$$\sum_{i=1}^{n} p_i [\sum_{t=1}^{m} R(t)\{f_i(s_i(t)) - f_i(s_i(t-1))\}]$$

ここで $\sum_{t=1}^{m} R(t)\{f_i(s_i(t)) - f_i(s_i(t-1))\}$ を変数 y_i とおくと，目的関数は $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i$ とかける．

期待報酬最大化問題は次のように定式化される．

$$\begin{aligned} \text{max.} \quad & \sum_{i=1}^{n} p_i y_i \\ \text{s.t.} \quad & y_i = \sum_{t=1}^{m} R(t)\{f_i(s_i(t)) - f_i(s_i(t-1))\} \\ & \qquad (i = 1, 2, ..., n) \\ & s_i(t) = \sum_{\tau=1}^{t} r_i(\tau) \quad (i = 1, 2, ..., n, t = 1, 2, ..., m) \\ & 0 \leq s_i(t) \leq s_{\max} \quad (i = 1, 2, ..., n, t = 1, 2, ..., m) \\ & r_i(t) \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., n, t = 1, 2, ..., m) \\ & \sum_{i=1}^{n} c_i r_i(t) \leq C(t) \quad (t = 1, 2, ..., m) \end{aligned}$$

この問題における変数と定数は以下のとおりである．

変数

$r_i(t)$ ：第 t 日に地域 i へ投入する捜索努力量

$s_i(t)$ ：第 t 日までに地域 i へ投入した累積努力量

y_i ：地域 i で目標を発見したときに得る報酬の期待値

定数

p_i ：地域 i における目標存在確率

c_i ：地域 i での単位努力あたりのコスト

$s_{\max}$：最大累積努力量
$C(t)$ ：第 t 日あたりの捜索コストの上限
$R(t)$ ：第 t 日にどこかの地域で目標を発見したときに得られる報酬

本研究では，各地域における目標存在確率 $p_i(i = 1,2,...,n)$ の値が正確にわからない場合を考え，ロバスト最適化の手法を適用する．

4 ロバスト最適化

ロバスト最適化では，不確定なデータの生じうる範囲をあらかじめ設定し，そのなかで最も都合の悪い状況が生じた場合を想定したモデル化が行われる．そのモデリング技法およびその解法を含めてロバスト最適化法と呼ばれる．

前節の問題は次の形

$$\begin{array}{ll} \text{max.} & p^T x \quad \forall p \in \mathcal{U} \\ \text{s.t.} & Ax \leq b, \quad Bx = d \end{array}$$

で表すことができる．データ p の不確実性集合を楕円体

$$\mathcal{U} = \{p^0 + Du : \|u\| \leq 1, e^T u = 0\}$$

とする．ただし，p^0 は p のノミナル値のベクトル，D は対角成分が $\delta > 0$ の対角行列，$e = (1,1,...,1)^T$ である．また，この問題は最大値問題なので最悪の場合の目的関数値は

$$\min_{u \in \mathcal{U}} (p^0 + Du)^T x = (p^0)^T x + \min_{u:\|u\| \leq 1, e^T u = 0} (D^T x)^T u$$

となる．ここで KKT 条件を用いて u を求め，書き換えると，ロバスト最適化問題は

$$\begin{array}{ll} \text{max} & (p^0)^T x - \delta\sqrt{x^T G x} \\ \text{s.t} & Ax \leq b, \quad Bx = d, \end{array}$$

となる．ただし，G は半正定値対称行列 $I - \frac{1}{n}ee^T$ である．これは 2 次錐計画問題である [2].

5 数値実験

捜索地域を $i \in \{1,2,3,4\}$，捜索期間を $t \in \{1,2,3,4\}$，目標存在確率を $p_i^0 = (\frac{20}{50}, \frac{15}{50}, \frac{9}{50}, \frac{6}{50})^T$，目標を発見したときの報酬を $(R(t))_{t=1}^4 = (10,8,5,3)^T$，最大累積努力量を $s_{\max} = 3$，第 t 日目の捜索コストの上限を $(C(t))_{t=1}^4 = (4,3,2,1)^T$ と設定し，不確実性集合 $\mathcal{U}$ の大きさを表すパラメータ δ を変化させて問題を解く．この問題のソルバーとして，MATLAB の fmincon を用いた．δ の値を設定する際，p^0 の要素の値よりも小さい値にすることが望ましい．また，$\delta = 0$ のとき，ロバスト最適化問題は不確実性のない努力量配分問題に一致する．数値実験の結果を表 1 にまとめる．この問題設定の場合，δ を大きくするにつれてそれぞれの変数 y_i の値の差が小さくなり，目的関数値も大きく変わっていないことから，より現実の捜索での最適努力配分に近づいたといえる．

表 1 実験結果

δ	0	0.02	0.05	0.1
y_1	9.5214	9.4652	9.3671	9.1316
y_2	9.1281	9.0068	8.8157	8.4745
y_3	6.9160	6.8585	6.8925	7.0629
y_4	4.1687	4.7070	5.2991	6.1284
$r_1(1)$	2.0431	2.0147	1.9584	1.7925
$r_1(2)$	0.4283	0.3996	0.3703	0.3806
$r_1(3)$	0.1775	0.1921	0.2139	0.2537
$r_1(4)$	0.0888	0.0960	0.1070	0.1269
$r_2(1)$	1.7022	1.6559	1.5784	1.4061
$r_2(2)$	0.6853	0.6398	0.5889	0.5799
$r_2(3)$	0.2840	0.3075	0.3403	0.3866
$r_2(4)$	0.1420	0.1538	0.1701	0.1933
$r_3(1)$	0.2547	0.3294	0.4632	0.6249
$r_3(2)$	1.4277	1.2735	1.0840	0.9346
$r_3(3)$	0.5917	0.6120	0.6263	0.6231
$r_3(4)$	0.2959	0.3060	0.3131	0.3115
$r_4(1)$	0	0	0	0.1765
$r_4(2)$	0.4586	0.6871	0.9568	1.1050
$r_4(3)$	0.9467	0.8884	0.8195	0.7367
$r_4(4)$	0.4734	0.4442	0.4098	0.3683
目的関数	8.292	8.2117	8.1069	7.9667

6 おわりに

本研究では，捜索努力配分問題において，期待報酬を最大化する問題を考え，現実の捜索に近づけるため，ロバスト最適化の手法を適用して定式化した．さらに，数値実験を行い，得られた解に対する考察を行った．数値実験では，解の妥当性，数値の変化などを分かりやすくするため問題設定において偏った値を用いた．捜索では不確実性が付きまとうため，実際のデータを用いた検証がやりにくい．実際の捜索のモデルケースを探し，数値として落とし込み，様々な不確実性集合を用いたロバスト最適化の検討を行うが今後の課題である．

参考文献

[1] 宝崎隆祐，飯田耕司：三訂 捜索理論—捜索オペレーションの数理—，三恵社，2007

[2] 太田快人，酒井英昭，高橋豊，田中利幸，永持仁，福島雅夫 [編集] :数理工学事典, 朝倉書店, 2011.

[3] 青山貴彦：不確実性をもつ在庫管理問題に対するロバスト最適化手法の適用，南山大学情報理工学部卒業論文，2015

[4] 和田さよ子：不確実性をもつ施設配置問題に対するロバスト最適化，南山大学情報理工学部卒業論文，2016