

# リーダー・フォロワー型配置問題に対する解法

2013SE160 大城 良介  
指導教員：福嶋雅夫

## 1 はじめに

私たちの周りには、様々なサービス施設がある。利用者全体に対して最も望ましい施設の配置場所を決める問題を施設配置問題という。施設配置問題とは、施設の配置可能地点（地域）、需要をもつ顧客の集合が与えられたとき、ある基準を満たす施設の配置場所を決定する問題の総称である [1]。配置する施設の特性や容量の有無などによって問題はいくつかの種類に分類される。本研究では、二人の意思決定者がそれぞれの施設を配置する問題を考える。その際、片方がまず自分の施設の配置をし、他方は相手の配置を知った上で自分の施設の配置をするとする。最初に施設を配置する意思決定者を先手（リーダー）、後で施設を配置する意思決定者を後手（フォロワー）と呼ぶ。そのとき、二人の意思決定者が互いに自分の目的が最適になるように施設の配置を決定する問題はリーダー・フォロワーゲーム（Stackelberg ゲーム）になる。佐々木と福嶋 [4] は Stackelberg ゲームにもとづく航空ネットワークのハブロケーションモデルを提案している。

本研究では競合する 2 つの会社がある地域において新しく出店しようとする状況を考え、それぞれの会社の利益が最大になるよう行動する問題をリーダー・フォロワーゲームを用いてモデル化し、2 つの会社の最適戦略を求める。

## 2 リーダー・フォロワー型配置問題

いま競合する 2 つの会社 A 社（先手）と B 社（後手）が、ある地域に新たにオープンする店舗の場所を決めなければならぬとする。新店舗の顧客は地域にある  $m$  個の町  $D_1, D_2, \dots, D_m$  の人々であり、それらの町にいる顧客の数はそれぞれ  $P_1, P_2, \dots, P_m$  である。そのとき、各町に住んでいる顧客が A 社の店舗と B 社の店舗を利用する割合は、その町と各店舗との距離によって定まるとする。

### 2.1 各需要点からの施設への距離

距離は直線距離（ユークリッド距離）を用いる。各需要点  $i \in S := \{1, 2, \dots, m\}$  の位置（座標）を  $(a_i, b_i)$  とすれば、先手と後手がそれぞれ位置  $(x, y)$  と  $(u, v)$  に施設を配置するとき、それらの施設と各需要点  $i$  の距離は次式で定まる。

$$d_i(x, y) = \sqrt{(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2}$$

$$d_i(u, v) = \sqrt{(u - a_i)^2 + (v - b_i)^2}$$

### 2.2 先手、後手の利益

先手、後手が得る利益はそれぞれの施設から需要点までの距離に応じて定まるものとする。具体的には、各需要点  $i$  から先手の施設までの距離と後手の施設までの距離を比べたとき、距離が小さい方の施設をより多くの顧客が利用すると考えられる。先手の施設を利用する顧客数を  $f_i(x, y, u, v)$ 、後手の施設を利用する顧客数を  $g_i(x, y, u, v)$  とすれば、それらは次のロジットモデルで表されると仮定する。

$$f_i(x, y, u, v) = P_i \cdot \frac{\alpha e^{d_i(u, v)}}{e^{d_i(x, y)} + \alpha e^{d_i(u, v)}}$$

$$g_i(x, y, u, v) = P_i \cdot \frac{e^{d_i(x, y)}}{e^{d_i(x, y)} + \alpha e^{d_i(u, v)}}$$

ここで  $\alpha > 1$  は先手の後手に対する魅力度を表す。いま、各社が獲得する顧客数を利益とみなせば、先手と後手が得る利益はそれぞれ次式で与えられる。

$$f(x, y, u, v) = \sum_{i=1}^m f_i(x, y, u, v)$$

$$g(x, y, u, v) = \sum_{i=1}^m g_i(x, y, u, v)$$

### 2.3 定式化

まず、後手（B 社）の問題は以下のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \max \quad & g(x, y, u, v) \\ \text{s.t.} \quad & (u, v) \in U \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、決定変数は  $(u, v)$  であり、 $U$  は後手が施設を配置できる領域を表す。次に先手（A 社）の問題は次のように定式化できる。

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x, y, u, v) \\ \text{s.t.} \quad & (x, y) \in X \\ & (u, v) \text{ は問題 (1) の最適解} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $X$  は先手が施設を配置できる領域を表す。

### 2.4 均衡制約をもつ数理計画問題への再定式化

以下では、後手は地域のどこにでも施設を配置できる ( $U = R^2$ ) と仮定する。先手の問題 (2) において、変数  $(u, v)$  の値は後手の問題 (1) の最適解として与えられるので、問題 (2) の最適性条件 [3]

$$\nabla_{(u,v)}g(x, y, u, v) = 0$$

を先手の問題 (2) の制約条件とすることにより, 問題 (2) は

$$\begin{aligned} \max \quad & f(x, y, u, v) \\ \text{s.t.} \quad & \nabla_{(u,v)}g(x, y, u, v) = 0 \\ & (x, y) \in X \end{aligned} \quad (3)$$

と表される. この問題は, 制約条件に均衡条件を含むことから, 均衡制約をもつ数理計画問題 (Mathematical Program with Equilibrium Constraints: MPEC) [2] と呼ばれる問題の一種とみなすことができる. 一般の MPEC では相補性条件が制約条件に含まれるが, 問題 (3) の制約条件は等式条件なので, 取り扱いと比較的容易である.

### 3 数値実験

MATLAB を用いてプログラムを作成し, 関数 fmincon を使用して問題 (3) を解いた.

#### 3.1 名古屋市をモデルとした実験

名古屋市の 16 個の区を需要点とし, 各区の人口を需要量 (顧客数) とみなして実験を行った. 表 1 に, 16 個の区とそれらの人口, 緯度 ( $x$ ) 緯度 ( $y$ ) を示す [5]. 先手の配置可能領域  $X$  に対して, 次の 5 つのケースを考え, 先手と後手の配置場所や獲得する顧客数を求める. また, 先手の魅力度は  $\alpha = 2$  とする.

表 1 名古屋市の区別の人口と座標

区	人口	$x$	$y$
千種区	166,394	56.47	9.59
東区	79,196	55.34	10.46
北区	163,630	54.42	11.39
西区	149,922	53.24	11.21
中村区	134,725	52.23	10.07
中区	86,857	54.37	10.07
昭和区	109,343	56.03	9.01
瑞穂区	107,160	56.06	7.54
熱田区	66,424	54.38	7.42
中川区	220,538	51.18	8.30
港区	144,688	53.08	6.28
南区	136,687	55.52	5.42
守山区	175,172	58.36	12.12
緑区	244,749	57.08	4.15
名東区	166,364	60.37	10.33
天白区	164,467	58.30	7.22

1.  $X = R^2$
2.  $X = \{(x, y) | 47 \leq x \leq 55.5, 7.5 \leq y \leq 15\}$
3.  $X = \{(x, y) | 55.5 \leq x \leq 64, 7.5 \leq y \leq 15\}$
4.  $X = \{(x, y) | 47 \leq x \leq 55.5, 0 \leq y \leq 7.5\}$
5.  $X = \{(x, y) | 55.5 \leq x \leq 64, 0 \leq y \leq 7.5\}$

### 3.2 実験結果と考察

表 2 は先手と後手の配置位置 (座標), 表 3 は獲得する顧客数をまとめたものである. ケース 1, 3 では両者が同じ座標に配置する結果になった. しかし, 先手のほうに多くの顧客が集まることが分かる. 他の結果を見ても先手, 後手とも地域のより中心へ配置しようとしていることが考えられる. この実験では後手の配置範囲に制約を設けていないため, 後手は先手の近くに配置する結果になっていると考えられる.

表 2 先手, 後手の配置

ケース	先手の座標	後手の座標
1	(55.6266, 8.9063)	(55.6266, 8.9063)
2	(55.5000, 8.8967)	(55.6263, 8.9053)
3	(55.6266, 8.9063)	(55.6266, 8.9063)
4	(55.4201, 7.5000)	(55.5251, 8.8325)
5	(55.5000, 7.5000)	(55.5348, 8.8407)

表 3 獲得する顧客数

ケース	先手の顧客数	後手の顧客数
1	1,544,211	772,105
2	1,542,723	773,593
3	1,544,211	772,105
4	1,386,002	930,314
5	1,385,607	930,709

## 4 おわりに

本研究では, リーダー・フォロワー型施設配置問題を均衡制約をもつ数理計画問題への再定式化することにより, 先手と後手の配置を求める方法を示した. さらに, 数値実験により, 得られた結果に対する考察を行った. 先手後手が複数存在する場合や後手の制約がより一般的な場合を考えることなどが今後の課題である.

### 参考文献

- [1] W. Domschke and A. Drexl, Location and Layout Planning: An International Bibliography, Springer-Verlag, 1985
- [2] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001
- [3] 福島雅夫, 新版数理計画入門, 朝倉書店, 2011
- [4] M. Sasaki and M. Fukushima, Stackelberg hub location problem, Journal of the Operations Research Society of Japan Vol.44, No.4, pp.390-402, 2001
- [5] <http://www.city.nagoya.jp/shisei/category/67-5-5-5-0-0-0-0-0-0.html>