

バックラッシュを考慮したベルト駆動の H_∞ 制御

2013SE261 吉田 賢司

指導教員：高見 勲

1 はじめに

本研究で用いられるベルト駆動は現在、ベルトコンベアなどの工作機械、または自動車におけるトランスミッション手法の一つである CVT に実用化されている。本研究のベルト駆動のモデリングではアイドルプーリー（減速機）と駆動側のダイナミクスを連立することで負荷側のプーリーと駆動側のプーリーのダイナミクスのみで制御対象を扱っている。本研究では [1] を参考に、[1] では、従来のモデルにバックラッシュを外乱として考慮し、変動パラメータであるドライブディスクとロードディスクの慣性モーメントのロバスト性を保証するために、行列ポリトープ表現を用い、 H_∞ 制御でシミュレーションまで行っている。本研究では、実験機に実装を行い、安定性を確かめ、より良い制御器設計を目指すことを目標とする。新規性として、バックラッシュを外乱として考えた H_∞ 制御に行列ポリトープ表現でロバスト性を保証し、実験機に実装することがあげられる。

2 モデリング

制御対象の各名称と物理パラメータを表 1 に示す。ベルト駆動の図を図 1 に示す。

表 1 物理パラメータ

名称	記号	単位
ロードディスクの半径	r_l	[m]
ドライブディスクの半径	r_d	[m]
アイドルプーリーがドライブディスクを回転させる半径	r_{pd}	[m]
アイドルプーリーがロードディスクを回転させる半径	r_{pl}	[m]
ドライブディスクの慣性モーメント	J_d	[kg · m ²]
アイドルプーリーの慣性モーメント	J_p	[kg · m ²]
ロードディスクの慣性モーメント	J_l	[kg · m ²]
ドライブディスクの粘性摩擦係数	c_d	[Ns/rad]
ロードディスクの粘性摩擦係数	c_l	[Ns/rad]
ドライブディスクとロードディスクとのギア比	gr_{dl}	
ドライブディスクとアイドルプーリーとのギア比	gr_{di}	
アイドルプーリーとロードディスクとのギア比	gr_{li}	
入力トルク	τ	[Nm]

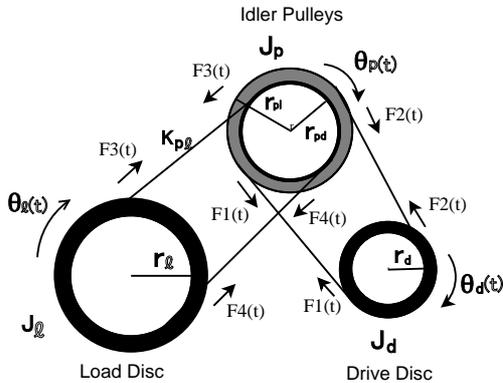


図 1 ベルト駆動のモデル

ドライブディスクの角度を θ_d 、角速度を $\dot{\theta}_d$ 、アイドルプーリーの角度を θ_p 、ロードディスクの角度を θ_l 、角速度を $\dot{\theta}_l$ とする。また、ドライブディスクとアイドルプーリー間で働く二つの力をそれぞれ F_1, F_2 とし、ロードディスクとアイドルプーリー間で働く二つの力をそれぞれ F_3, F_4 とした。今回のモデリングでは、ロードディスクとアイドルプーリーの運動方程式を連立させ、アイドルプーリーのダイナミクスを消去した。この消去したモデルに、バックラッシュを外乱として考慮したドライブディスクの式を (1)、ロードディスクの式を (2) に示す [2]。

$$J_d^* \ddot{\theta}_d(t) = \tau(t) - c_d \dot{\theta}_d(t) - K_L gr_{dl}^{-2} \theta_d(t) + K_L gr_{dl}^{-1} \theta_l(t) - K_L gr_{dl}^{-2} d_\alpha(t) \quad (1)$$

$$J_l \ddot{\theta}_l(t) = -c_l \dot{\theta}_l(t) + K_L gr_{dl}^{-1} \theta_d(t) - K_L \theta_l(t) + K_L d_\alpha(t) \quad (2)$$

$$(K_L \triangleq 2K_{pl} r_l^2, J_d^* \triangleq J_d + gr_{dl}^{-2} J_p)$$

ここで、外乱 d_α は以下のように定義される。

$$d_\alpha(t) = \begin{cases} -\alpha & (gr_{dl}^{-1} \theta_d - \theta_l > \alpha) \\ -gr_{dl}^{-1} \theta_d + \theta_l & (|gr_{dl}^{-1} \theta_d - \theta_l| < \alpha) \\ +\alpha & (gr_{dl}^{-1} \theta_d - \theta_l < -\alpha) \end{cases} \quad (3)$$

α はバックラッシュの角度である。

3 状態空間表現

状態変数と入力、外乱を以下に定義する。

$$x(t) = [\theta_d, \dot{\theta}_d, \theta_l, \dot{\theta}_l]^T, u(t) = \tau, w(t) = d_\alpha(t)$$

これより、制御対象の状態空間表現が以下に与えられる。

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (4)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K_L gr_{dl}^{-2}}{J_d^*} & -\frac{c_d}{J_d^*} & \frac{K_L gr_{dl}^{-1}}{J_d^*} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K_L gr_{dl}^{-1}}{J_l} & 0 & -\frac{K_L}{J_l} & -\frac{c_l}{J_l} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_L gr_{dl}^{-1}}{J_d^*} \\ 0 \\ \frac{K_L}{J_l} \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_d^*} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [0 \ 0 \ 1 \ 0]$$

4 最適サーボシステム

定常状態の誤差をなくすために、最適サーボシステムを考慮した。出力 $y(t)$ と目標値 $r(t)$ との間の誤差を $e(t)$ とする。状態変数を $x_e(t)^T = [x(t) \ f e(t)]^T$ とすると、最適サーボシステムは以下で表現できる。

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_{1e} w(t) + B_{2e} u(t) \\ y(t) = C_1 x_e(t) \end{cases} \quad (5)$$

ここで行列 $A_e, B_{1e}, B_{2e}, C_1, w(t)$ は以下である。

$$A_e = \begin{bmatrix} A & 0_{4 \times 1} \\ -C & 0 \end{bmatrix}, B_{1e} = \begin{bmatrix} B_1 & 0_{4 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_{2e} = \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix}, C_1 = [C \ 0], w(t) = \begin{bmatrix} d_\alpha \\ r \end{bmatrix} \quad (6)$$

5 行列ポリトープ表現

本研究では、慣性モーメント J_d^*, J_l のロバスト性を保証するために、 J_d^*, J_l を以下のように指定した。

$$\{J_{dmin}^*, J_{lmin}\}, \{J_{dmax}^*, J_{lmax}\} \\ \{J_{dmin}^*, J_{lmax}\}, \{J_{dmax}^*, J_{lmin}\} \quad (7)$$

行列ポリトープ表現を使うことにより、行列 A_{ei}, B_{1ei}, B_{2ei} の端点の範囲を以下のように示す。

$$A_{ei} (i = 1, 2, 3, 4), \\ B_{1ei} = (i = 1, 2, 3, 4), B_{2ei} (i = 1, 2, 3, 4)$$

もし、それぞれの端点安定化するなら、端点の間の安定化されると考える。

6 H_∞ 制御

(4) 式より、 H_∞ 制御のシステムを以下に定義した。

$$\begin{cases} \dot{x}_e(t) = A_e x_e(t) + B_{1e} w(t) + B_{2e} u(t) \\ z(t) = C_2 x_e(t) + D_2 u(t) \end{cases} \quad (8)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} W_x & 0_{4 \times 1} \\ 0 & W_e \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ 0 \\ W_u \end{bmatrix}$$

ここで、 $z(t)$ は評価出力とする。 $W_x \succ 0, W_e \succ 0, W_u \succ 0$ はそれぞれ、重み行列、積分器、入力に対する重みとする。この制御器について、外乱 $w(t)$ から評価出力 $z(t)$ までの H_∞ ノルムを最小化する。もし、 H_∞ ノルムが γ_∞ より小さいものが存在するなら、最悪な外乱に対しても外乱を抑える効果を保証することができる。

変数変換を行い、LMI 条件を定式化したものを以下に示す。

minimize : γ_∞

subject to : $X \succ 0$

$$\begin{bmatrix} X A_{ei}^T + A_{ei} X + B_{2ei} Y + Y^T B_{2ei}^T & * & * \\ C_2 X + D_2 Y & -\gamma_\infty I & 0 \\ B_{1ei}^T & 0 & -\gamma_\infty I \end{bmatrix} \prec 0$$

$$(i = 1, 2, 3, 4)$$

(9)

このとき、LMI 式 (9) を安定化させる、 X と Y が存在する時、状態フィードバックゲイン $K x_e(t) = Y X^{-1} x_e(t)$ が存在し、このシステムは安定化される。

7 実験結果

本研究では、ロバスト LQ 制御と H_∞ 制御での実験を行った。バックラッシュの角度を $0.6[\text{deg}] := 0.0105[\text{rad}]$ とし、ロードディスクの角度の目標値を $\frac{\pi}{2}[\text{rad}]$ とする。 $W_x,$

$W_e, W_u,$ 状態フィードバックゲイン K を以下に設定した。

$$W_x = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.001 \end{bmatrix}, W_e = 0.1, \\ W_u = 1.0 \times 10^{-4} \\ K = [-0.8553 \quad -0.0630 \quad 0.2831 \quad 0.0001 \quad |7.8602]$$

行列ポリトープ表現で場合分けされたロードディスクとドライブディスクの慣性モーメントを考慮し、ロバスト LQ 制御と H_∞ 制御のロードディスクの角度の実験結果の比較したものを図 2-5 に示す。

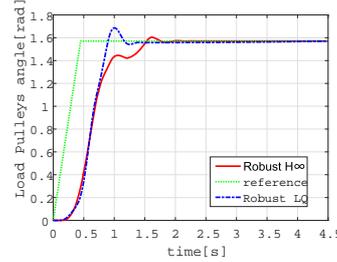


図 2 J_{dmin}^*, J_{lmin}

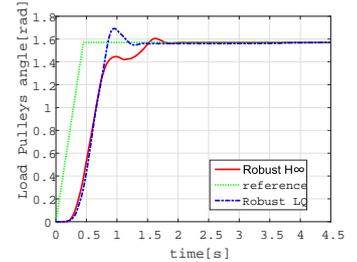


図 3 J_{dmax}^*, J_{lmin}

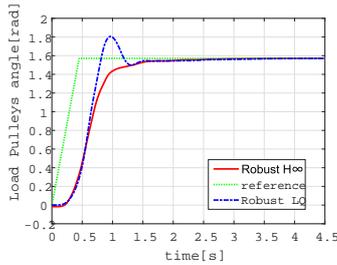


図 4 J_{dmin}^*, J_{lmax}

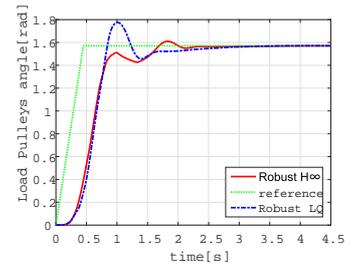


図 5 J_{dmax}^*, J_{lmax}

図 2-5 より、ロードディスクの角度はロバスト LQ 制御より H_∞ 制御の方が目標値 $\frac{\pi}{2}[\text{rad}]$ に早く収束し、外乱として扱っているバックラッシュの影響を抑えることがわかった。

8 おわりに

本研究では、従来のモデルに最適サーボシステムと H_∞ 制御に行列ポリトープ表現を加えて、ロバスト性を保証し実験機に実装することに成功した。今後の課題として慣性モーメントや粘性摩擦またはほかの摩擦などの影響を考慮した制御器設計を行い、より良い制御器設計を考えたい。

参考文献

- [1] Masatsugu HIBINO: H_∞ control of Industrial Emulator with backlash, Graduate Program of Mechatronics Graduate School of Science and Engineering Nanzan University, 2016.
- [2] L.Acho, F.Ikhouane, and G.Pujol: Robust Design for Mechanismes with Backlash, JCET Vol.3 Iss.4 October 2013, PP.175-180.