Control Moment Gyroscope の
適応追従型スライディングモード制御

2013SE067 神谷直樹

指導教員：高見勲

1 はじめに

Control Moment Gyroscope(以下，CMG) は，入力に対して多くの状態をもつ劣駆動システムであり，非ホロノミック拘束を持つ．そのようなシステムに対して，文献 [1] では，非ホロノミック拘束を用いてシステムを表し，積分器を用いることにより，摩擦を主とする外乱を補償し，Backsteppinng 法による目標値追従制御をおこなっている．本研究では，この非ホロノミック拘束が成立しないことを想定する．また，外乱の影響をうけても追従するロバストな制御器の設計をする必要がある．そこで，本研究では，非線形制御において容易にロバスト性を保証できるスライディングモード制御を用いる．具体的には，文献 [1] の既知な外乱が生じても，スライディングモードの存在条件を満たすように，制御器を設計する．また，文献 [2] では，多入力多出力系のシステムに対してスライディングモード制御を適用している．本研究では，劣駆動系である CMG に対しスライディングモード制御を適用する手法を示す．具体的には系を 2 つのサブシステムに分割し，それぞれに対してスライディングモードの存在条件を適用し，各サブシステムを安定化させることで系全体を安定にさせる方法を用いる．

2 モデリング

図 1 に CMG の概略図を示す．Rotor1 を回転させる

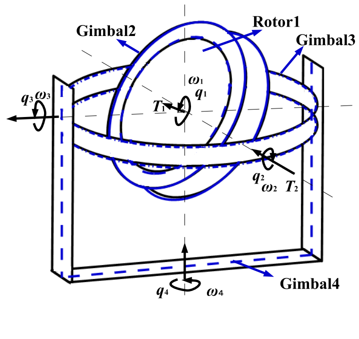

図 1 CMG の概略図

モータ 1 のトルクを $T_1(t)$，Gimbal2 を回転させるモータ 2 のトルクを $T_2(t)$ とする．$q_1(t)$ を Gimbal2 に対する Rotor1 の角度をとして，$q_2(t)$ を Gimbal3 に対する Gimbal2 の角度とする．また，$\omega_1(t)$，$\omega_2(t)$ を，それぞれ $q_1(t)$，q_2 の角速度とする．Rotor1，Gimbal2，Gimbal4 にかかる外乱を $F_i(i=1,\ 2,\ 4)$ とする．本研究では，Gimbal2 の駆動角度を $0<q_2<\frac{\pi}{2}$[rad] とし，Gimbal3 を固定した場合を考える．Rotor1，Gimbal2，Gimbal4 の運動方程式は，式 (1)-(3) になる．

$$I_{R1y}\dot{\omega}_1 + I_{R1y}\dot{\omega}_4\sin q_2 + I_{R1y}\omega_2\omega_4\cos q_2 = T_1 + F_1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}(I_{G2x}+I_{R1x})\dot{\omega}_2 - I_{R1y}\omega_1\omega_4\cos q_2 \\ -I_1\omega_4^2\sin q_2\cos q_2 = T_2 + F_2\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}I_{R1y}\dot{\omega}_1\sin q_2 + (I_2 + I_1\sin^2 q_2)\dot{\omega}_4 \\ +I_1\omega_2\omega_4\sin 2q_2 + I_{R1y}\omega_1\omega_2\cos q_2 = F_4\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= I_{G2y}+I_{R1y}-I_{R1x}-I_{G2z} \\ I_2 &= I_{R1x}+I_{G2z}+I_{G3x}+I_{G4x}\end{aligned}$$

座標変換，入力変換を式 (4)，(5) とすると CMG のシステムは，式 (6) になる．q_1,ω_1 は，制御しないため式 (6) から外す．

$$\begin{aligned}&[x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6]^{\mathrm{T}} \\ &= [q_1,\omega_1,\ q_2,\omega_2,\ q_4,\omega_4]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{4}$$

$$[u_1,\ u_2]^{\mathrm{T}} = [\dot{\omega}_1,\dot{\omega}_2]^{\mathrm{T}} \tag{5}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u_2 + d_2 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = f(X) + g(X)u_1 + d_4\end{array}\right. \tag{6}$$

$$f(X) = -\frac{I_1x_4x_6\sin 2x_3 + I_{R1y}x_2x_4\cos q_2}{I_2 + I_1\sin^2 x_3} \tag{7}$$

$$g(X) = -\frac{I_{R1y}\sin x_3}{I_2 + I_1\sin^2 x_3} \tag{8}$$

$$d_2 = \frac{F_2}{I_{G2x}+I_{R1x}} \tag{9}$$

$$d_4 = -\frac{F_1\sin x_3 - F_4}{I_2 + (I_1 - I_{R1y})\sin^2 x_3} \tag{10}$$

ここで，$X=[x_1,\ \cdots,\ x_6]^{\mathrm{T}}$ であるとする．

3 制御系設計

制御器設計を行う上で，システムを 2 つのサブシステムに分割し，それぞれに対して切換面を設計し，スライディングモードの存在条件を満たすように制御器を設計する．指令軌道と軌道偏差を，それぞれ式 (11)，(12) とする．

$$\left\{\begin{array}{l}x_{3d} = q_{2d} \\ x_{5d} = q_{4d}\end{array}\right. \tag{11}$$

$$\left\{\begin{array}{l}e_1 = x_3 - x_{3d} \\ e_2 = x_5 - x_{5d}\end{array}\right. \tag{12}$$

式 (6) より，明らかに x_3 に対して u_2，x_5 に対して u_1 が対応するため，システムを以下の二つのサブシステム Δ_1，Δ_2 に分けて考える．ここで，$F_i=0(i=1,\ 2,\ 4)$ とする．つまり，$d_2=0$，$d_4=0$ の場合を考える．

$$\Delta_1 : \left\{\begin{array}{l}\dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = u_2\end{array}\right. \quad \Delta_2 : \left\{\begin{array}{l}\dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = f(x) + g(x)u_1\end{array}\right. \tag{13}$$

サブシステム $\Delta_i(i=1,\,2)$ に対して，切換面 s_i と到達則 $\dot{s}_i$ を，以下のように与える．

$$s_i = c_i e_i + \dot{e}_i,\ c_i > 0 \tag{14}$$
$$\dot{s}_i = -k_i s_i - \eta_i \mathrm{sgn}(s_i),\ k_i > 0, \eta_i > 0 \tag{15}$$

式 (14) の時間微分と式 (15) より，入力 $u_i(i=1,\,2)$ は以下のように与えられる．

$$u_1 = -\frac{c_2\dot{e}_2 + f(x) - \ddot{x}_{5d} + k_2 s_2 + \eta_2 \mathrm{sgn}(s_2)}{g(x)} \tag{16}$$
$$u_2 = -(c\dot{e}_1 - \ddot{x}_{3d} + k_1 s_1 + \eta_1 \mathrm{sgn}(s_1)) \tag{17}$$

ここで，式 (6) の d_2，d_4 が存在する場合を考える．リアプノフ関数 $V(s_i)(i=1,\,2)$ を，

$$V(s_i) = \frac{1}{2}s_i^2 \tag{18}$$

とすると，その微分は，入力 u_1，u_2 より，

$$\begin{aligned}\dot{V}(s_i) &= s_i\dot{s}_i \\ &= s_i(-k_i s_i - \eta_i \mathrm{sgn}(s_i) + d_{2i}) \\ &\leq -k_i s_i^2 - (\eta_i - d_{2i})|s_i|\end{aligned} \tag{19}$$

となり，明らかに $d_{2i} < \eta_i$ となるように η_i を選べばスライディングモード存在条件を満たす．また，符号関数 $\mathrm{sgn}(s_i)(i=1,\,2)$ は，入力のチャタリングを軽減するため，以下の関数を用いる．

$$\frac{s_i}{|s_i| + \delta_i} \tag{20}$$

以上より，運動方程式 (1)-(3) から，得られた入力 u_1，u_2 を用いて，トルク T_1，T_2 を求めると，以下のように与えられる．

$$\begin{aligned}T_1 = &\frac{I_{R1y}(I_2 + (I_1 - I_{R1y})\sin^2 q_2)}{I_2 + I_1 \sin^2 q_2}u_1 \\ &- \frac{I_{R1y}\omega_2 \cos q_2 (I_1\omega_4 \sin^2 q_2 - I_2\omega_4 + I_{R1y}\omega_1 \sin q_2)}{I_2 + I_1 \sin^2 q_2}\end{aligned} \tag{21}$$

$$\begin{aligned}T_2 = &(I_{G2x} + I_{R1x})u_2 - I_{R1y}\omega_1\omega_4 \cos q_2 \\ &- I_1\omega_4^2 \sin q_2 \cos q_2\end{aligned} \tag{22}$$

4　実験結果

設計した制御系を用いて，実験を行う．初期値と指令軌道は，それぞれ以下のように設定する．

$$x_0 = [0\ \frac{\pi}{18}\ 0\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$$

$$q_{2d} = \begin{cases} \frac{\pi}{18} & (t \leq 2) \\ -\frac{7}{36}\pi \sin \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{4} & (2 < t \leq 6) \\ \frac{7}{72}\pi \sin\left(\frac{\pi}{2}t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{25}{32}\pi & (6 < t) \end{cases}$$

$$q_{4d} = \begin{cases} 0 & (t \leq 2) \\ -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2} & (2 < t \leq 8) \\ 1 & (8 < t) \end{cases}$$

各パラメータは，文献 [1] の摩擦モデルから，以下の値を与える．

$$\begin{cases} c_1 = 10, \eta_1 = 3,\ k_1 = 2, \delta_1 = 0.1 \\ c_2 = 9,\ \eta_2 = 1,\ k_2 = 10, \delta_2 = 0.1 \end{cases} \tag{23}$$

実験結果を以下に示す．図 2，3 より，Gimbal2，Gimbal4 はともに目標値に追従していることがわかる．図 4，6 より，トルク T_1 は $|T_1| < 0.6[\mathrm{N \cdot m}]$ であり，トルク T_2 は $|T_2| < 2.4[\mathrm{N \cdot m}]$ であるため，入力トルクの制約は満たされている．図 5 より，q_1 の角速度 ω_1 は安定せずに増加していき，25 秒後も増加し続ける．

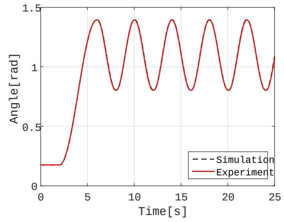

図 2　q_2 の実験結果

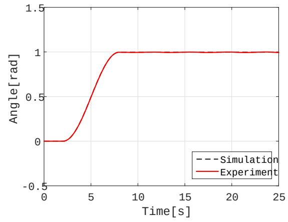

図 3　q_4 の実験結果

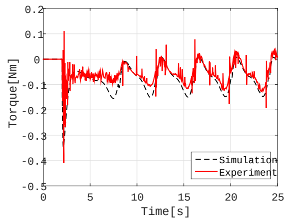

図 4　トルク T_1 の実験結果

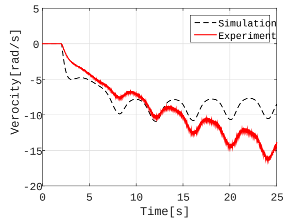

図 5　ω_1 の実験結果

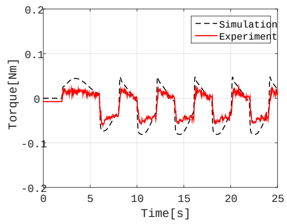

図 6　トルク T_2 の実験結果

5　おわりに

CMG に対してスライディングモード制御による非線形制御を適用し，実験により設計した制御器の有用性を確認した．今後の課題として，Rotor1 の速度も安定となる制御器の設計を目指す．

参考文献

[1] 村井千夏，中上礼奈: 非ホロノミック拘束を持つ CMG の摩擦補償を含む非線形追従制御第 3 回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム，計測自動制御学会，2B2-4，2016.

[2] Alireza Nasiri, Sing Kiong Nguang, Akshya Swain: Adaptive sliding mode control for a class of MIMO nonlinear systems with uncertainties, Journal of the Franklin Institute, Vol. 351, Issue. 4, pp. 2048-2061, 2014.