Control Moment Gyroscope のゲインスケジューリング制御

2013SE048 稲垣 伸
指導教員：高見　勲

1　はじめに

本研究で使用する Control Moment Gyroscope (以下 CMG) は強い非線形性をもつ．先行研究では，H_2 制御手法を用い成果が報告されている [1]．また，gridding approach を用いてゲインスケジューリング (以下 GS) 制御を行い成果が報告されている [2]．GS を適用することにより，システムの変動に応じ，コントローラを適応させる制御を行なうことができる．しかし，gridding approach では，変動空間を細分化して，その格子点だけで安定性を求めている．そこで本研究では，テイラー展開を用いて平衡点の周りで近似し，ディスクリプタ表現，ポリトープ表現，線形分数変換 (LFT)，パラメータ依存リアプノフ関数に基づき，GS 制御系を設計する．

2　モデリング

図 1 に，CMG の概略図を示す．

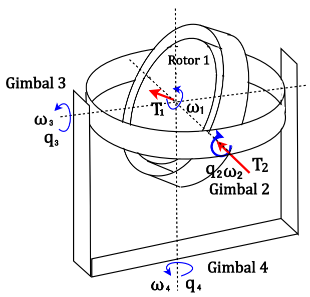

図 1　CMG の概略図

CMG には，Rotor1 を回転させる Motor1 のトルク $T_1(t)$ と Gimbal2 を傾ける Motor2 のトルク $T_2(t)$ が存在する．Rotor1 の角速度を $\omega_1(t)$，Gimbal2 の角度と角速度を q_2, ω_3, Gimbal3 の角度と角速度を $q_3(t)$, $\omega_3(t)$, Gimbal4 の角度と角速度を $q_4(t)$，$\omega_4(t)$ と定義する．Rotor1，Gimbal2 によって生成されるジャイロ効果を得るため，導出した運動方程式から，$\sin(q_2) \approx q_2$，$\cos(q_2) \approx 1 - q_2^2/2$ と近似し，q_2 の可動範囲を $-\pi/6 < q_2 < \pi/6$ とする．Gimbal3 をロックせず，$q_3 = 0$ まわりで微小変動するものとして仮定する．また，ω_2，ω_3，ω_4 の値は十分小さいものと仮定し、二乗項は無視する．状態変数を $x(t) = [\int(q_3^{ref} - q_3)dt\ \int(q_4^{ref} - q_4)dt\ q_3\ q_4\ \omega_2\ \omega_3\ \omega_4]^{\mathrm{T}}$ とおき，$q_3^{ref} = 0$ とする．$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ の形にすると，式 (1) となる．

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & -F^{-1}G & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ & \\ & F^{-1}H \\ & \end{bmatrix} u(t) \tag{1}$$

$$F = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_3 & a_4 \end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix} 0 & b_1 & b_2 \\ -b_1 & 0 & 0 \\ -b_2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c_1 & 0 \\ c_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = I_C + I_D,\ a_2 = J_b - J_a q_2^2,\ a_3 = J_a(q_2 - \frac{2q_2^3}{3}),$$

$$a_4 = J_c + J_d q_2^2,\ b_1 = J_D\omega_1 q_2,\ b_2 = -J_D\omega_1(1 - \frac{q_2^2}{2})$$

$$c_1 = -(1 - \frac{q_2^2}{2}),\ c_2 = -q_2$$

$$J_a = J_C - K_C - K_D,\ J_b = J_B + J_C,$$

$$J_c = K_A + K_B + K_C + I_D,\ J_d = J_C - K_C - I_D$$

I_D，J_D，K_D : Rotor1 の慣性モーメント $[\mathrm{kg \cdot m^2}]$
I_C，J_C，K_C : Gimbal 2 の慣性モーメント $[\mathrm{kg \cdot m^2}]$
J_B，K_B : Gimbal 3 の慣性モーメント $[\mathrm{kg \cdot m^2}]$
K_A : Gimbal 4 の慣性モーメント $[\mathrm{kg \cdot m^2}]$

3　制御設計

スケジューリングパラメータを制御器の姿勢よって作用が大きく変わるパラメータ ω_1，q_2 とする．ディスクリプタ変数を $x_d(t) = [x(t)^{\mathrm{T}}\ \dot{\omega}_2(t)\ \dot{\omega}_3(t)\ \dot{\omega}_4(t)\ T_1(t)]^{\mathrm{T}}$ として表すと，式 (2) となる．

$$E_d\dot{x}_d(t) = A_d x_d(t) + B_d u_d(t) \tag{2}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} O_{2\times2} & M & O_{2\times2} & O_{2\times1} \\ O_{3\times2} & O_{3\times1} & I_3 & O_{3\times1} \\ O_{3\times2} & -G & -F & L \\ O_{1\times2} & O_{1\times3} & O_{1\times3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix},$$

$$E_d = \begin{bmatrix} I_7 & O_{7\times4} \\ O_{4\times7} & O_{4\times4} \end{bmatrix},\ B_d = \begin{bmatrix} O_{6\times2} & \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

行列 A_d が二乗項を含まない形式に等価変換を行うために変動パラメータが ω_1，q_2 のスケジューリングパラメータ

を LFT で取り出す方法を適用する．新たにディスクリプタ変数 $\tilde{x}_d(t)$ を与えることで，式 (3)-(4) のようになる．

$$A_d(t) = A_n + B_\delta(I - \Delta D_\delta)^{-1}\Delta C_\delta \tag{3}$$

$$\tilde{E}_d\dot{\tilde{x}}_d(t) = \tilde{A}_d\tilde{x}_d(t) + \tilde{B}_d u(t) \tag{4}$$

$$\tilde{A}_d = \begin{bmatrix} A_n & B_\delta\Delta \\ C_\delta & D_\delta\Delta - I \end{bmatrix}$$

$$\tilde{E}_d = \begin{bmatrix} E_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \tilde{B}_d = \begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \mathrm{diag}([\omega_1\ \omega_1\ \omega_1\ \omega_1\ \omega_1\ \omega_1])$$

パラメータ依存リアプノフ関数を扱うために，変動パラメータ ω_1，$\dot{\omega}_1$，q_2，ω_2 の上下界を頂点とするパラメータボックス Θ を式 (5) で与え，パラメータボックスの端点から，制御器のロバスト性を保証することを考える．

$$\Theta = \{\theta = [\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3,\ \theta_4]^{\mathrm{T}} : \theta_i \in \{\underline{\theta}_i, \overline{\theta}_i\}\}(i = 1, \ldots, 4) \tag{5}$$

$$\theta_1 = q_2,\ \theta_2 = \omega_1,\ \theta_3 = \omega_2,\ \theta_4 = \dot{\omega}_1$$

4　LMI 定式化

本研究では，評価関数 J

$$J = \int_0^\infty (x(t)^{\mathrm{T}}Qx(t) + u(t)^{\mathrm{T}}Ru(t))dt \tag{6}$$

を最小化する最適レギュレータ理論に基づく GS 制御器を設計する．行列 E_d の構造を考慮し，リアプノフ行列 $X_d(\theta)$ と変数行列 $Y_d(\theta)$ を以下の式のように与える．

$$X_d(\theta) = X_{d0} + \theta_1 X_{d1} + \theta_2 X_{d2},$$
$$Y_d(\theta) = Y_{d0} + \theta_1 Y_{d1} + \theta_2 Y_{d2},$$
$$X(\theta) = X_0 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2,\ \tilde{E}_d\dot{\tilde{X}}_d(\theta) = \theta_3 X_1 + \theta_4 X_2$$

$$X_{di} = \begin{bmatrix} X_i & 0 & 0 \\ X_{i\_21} & X_{i\_22} & X_{i\_23} \\ X_{i\_31} & X_{i\_32} & X_{i\_33} \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$Y_{di} = \begin{bmatrix} Y_i & 0 & 0 \end{bmatrix}\quad (i = 0,\ 1,\ 2) \tag{8}$$

ただし，$\tilde{A}_d(\theta)X_d(\theta)$ によって変動パラメータの二乗項が存在するため，アフィンの形になるように制約を与えた．$C_d = [W_x\ 0\ 0]$，$W_x = [Q^{\frac{1}{2}}\ 0]^{\mathrm{T}}$，$D_d = [0\ R^{\frac{1}{2}}]$ とおくと，スケジューリングパラメータ θ の変動範囲内において安定化する GS コントローラを求めるための LMI 条件は以下のようになる．

$$minimize : \gamma \tag{9}$$

$$subject\ to : X(\Theta_j) \succ 0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{He}[A_d(\Theta_j)X_d(\Theta_j) + B_dY_d(\Theta_j)] - \tilde{E}_d\dot{\tilde{X}}_d(\Theta_j) & X_d(\Theta_j)^{\mathrm{T}}C_d^{\mathrm{T}} + Y_d(\Theta_j)^{\mathrm{T}}D_d^{\mathrm{T}} \\ C_dX_d(\Theta_j) + D_dY_d(\Theta_j) & -I \end{bmatrix} \prec 0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} W & I \\ I & X(\Theta_j) \end{bmatrix} \succ 0 \tag{12}$$

$$\mathrm{trace}(W) < \gamma\quad (j = 1,\ \ldots,\ 16) \tag{13}$$

$$\Theta_1 = (\underline{\theta}_1,\ \underline{\theta}_2,\ \underline{\theta}_3,\ \underline{\theta}_4),\ \Theta_2 = (\overline{\theta}_1,\ \underline{\theta}_2,\ \underline{\theta}_3,\ \underline{\theta}_4)$$
$$,\ \ldots\Theta_{16} = (\overline{\theta}_1,\ \overline{\theta}_2,\ \overline{\theta}_3,\ \overline{\theta}_4)$$

式 (9)-(13) を満たす $X_d(\theta)$，$Y_d(\theta)$ が存在すれば，システムは安定であり，ディスクリプタ表現の枠組みにおける GS コントローラ $K_d(\theta)$ は以下の式で与えられる．

$$K_d(\theta) = \begin{bmatrix} Y(\theta)X(\theta)^{-1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

5　実験結果

設計した制御系と固定ゲインのロバスト LQ 制御で実験を行い，GS 制御の有用性を検証する．初期値 $x_0 = [0\ 0\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$ と変動パラメータ q_2，ω_2，ω_1，$\dot{\omega}_1$ の上下界の設定をし，シミュレーションと実験を行った．上界値を表 1，Gimbal4 の角度 q_4 のシミュレーションと実験結果を図 2，ゲイン K_d における変化を図 3-4 に示す．　図 3-4 より，GS 制御のスケジューリングパラメータの変化が確認でき，ゲイン K_d が調整されていることがわかる．図 2 より，GS 制御の実験結果とシミュレーション結果がほぼ一致した．また，ロバスト LQ 制御に対して，GS 手法の方が追従性能の向上が見られた．

表 1　Upper bound value

	Nominal	GS	ロバスト LQ
Upper bound	$\gamma = 58.68$	$\gamma = 72.27$	$\gamma = 80.22$

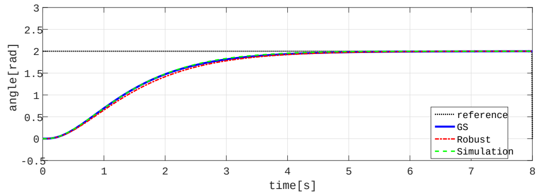

図 2　Angle of Gimbal4

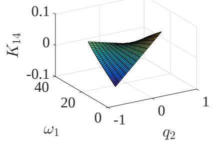

図 3　Change of K_{14}

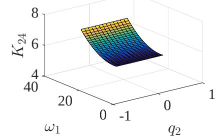

図 4　Change of K_{24}

6　おわりに

実験結果から GS 制御の有用性が確かめられた．今後の課題として，Gimbal3 の角度 q_3 も制御対象にすることが挙げられる．

参考文献

[1] Toru Inaba，Chinatsu Murai，Gan Chen and Isao Takami: Robust Control of Control Moment Gyroscope with Friction Disturbance -Using Polytopic Representation-，2015 7th International Conference on Information Technology and Electrical Engineering，pp.559-564，2015.

[2] Hossam S. Abbas，Ahsan Ali，Seyed M. Hashemi and Herbert Werner: LPV Gain-Scheduled Control of a Control Moment Gyroscope，2013 American Control Conference(ACC)， pp.6857-6862， 2013.