

代用電荷法による近似等角写像 -電圧調整モデル-

2013SE244 山田裕次郎

指導教員：杉浦洋

1 はじめに

代用電荷法は2次元ラプラス方程式の数値解法として提案された。代用電荷法の特徴は、厳密解が十分なめらかならば、少ない手間で高精度の近似解が得られやすいこと、導関数を精度良く計算しやすく、特に厳密解が十分なめらかならば、境界まで込めてよい近似を与えることの二つである。

天野 [1] の方法は代用電荷の作る電位 0 の等電位線を領域 D の境界 ∂D に合わせる方法である。我々の方法は、天野のモデルにおいて電位が $-c$ の等電位線を ∂D に合わせることに相当する。

数値実験により、新しいモデルは天野のモデルより優れていることがわかった。

2 天野のアルゴリズム

天野は原点の電荷量 -1 の電荷による電位 0 の等電位線 ($|z| = 1$) を、 n 個の電荷で変形し、目標とする領域 D の境界に合わせることを考えた。領域 D 内に特異点が生じないように、付加する N 個の電荷は D の外部にとる。生ずる複素ポテンシャルは、実パラメタ d を新たに導入して、

$$P(z) = \log z - \sum_{i=1}^n q_i \log(z - \zeta_i) + id = u(z) + iv(z)$$

とする。我々は、これに電位をシフトする実パラメタ c を加え、

$$P(z) = \log z - \sum_{i=1}^n q_i \log(z - \zeta_i) + c + id$$

とする。

もしこの $P(z)$ で、 D の境界 ∂D が電位 0 の等電位線 $u(z) = -c$ と一致すれば、 D 上の関数

$$w = f(z) = e^{P(z)} = e^{u(z)+iv(z)+c} \quad (1)$$

は、等電位線 $u(z) = a - c$ を w 平面の円 $|w| = e^a$ ($a \leq 0$) に移す。すなわち、 D を単位円 B に移す。さらに、 ζ_i が D の外部にあれば、

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left(\log z - \sum_{i=1}^n q_i \log(z - \zeta_i) + c + id\right) \\ &= e^{id} z \exp\left(-\sum_{i=1}^n q_i \log(z - \zeta_i) + c\right) \end{aligned}$$

は D 上で正則であり、かつ $f(0) = 0$ を満たす。残る条件 $f'(0) > 0$ は d を調整することで達成される。すなわち、 $w = f(z)$ が求める等角写像である。

D の数値計算では、境界 ∂D に m ($m \geq n + 1$) 個の拘束点 $z_1 \sim z_m$ をとる。 ∂D 上では電位 $u(z) = 0$ となるべきだから、条件

$$u(z_j) = \log |z_j| - \sum_{i=1}^n q_i \log |z - \zeta_i| + c = 0 \quad (1 \leq j \leq m)$$

により、電荷量 $q_1 \sim q_n$ と c を決定する。 $f(z)$ は条件 (1) を完全には満たさないの、近似等角写像となる。 $m = n + 1$ のときはガウス消去法 [1, 3], $m > n + 1$ のときは最小自乗法を用いる [2, 4].

任意定数 d は、 $f'(0) > 0$ を満たすように決める。すなわち、

$$d = \sum_{i=1}^n q_i \log(-\zeta_i)$$

とする。これを $v(z)$ に代入すると、

$$\begin{aligned} v(z) &= -\sum_{i=1}^n q_i \arg(z - \zeta_i) + \sum_{i=1}^n q_i \arg(-\zeta_i) \\ &= -\sum_{i=1}^n q_i \arg\left(1 - \frac{z}{\zeta_i}\right) \end{aligned}$$

で、自然に条件 $f'(0) > 0$ が満たされる。

以上をまとめると、方程式 (1) により電荷量 q_i と c を定め、求める等角写像は、

$$\begin{aligned} f(z) &= ze^{\tilde{P}(z)} \\ \tilde{P}(z) &= -\sum_{i=1}^n q_i \log |z - \zeta_i| - i \sum_{i=1}^n q_i \arg\left[1 - \frac{z}{\zeta_i}\right] + c \end{aligned}$$

となる。

3 数値実験

境界関数 $s(\theta)$ を与え、境界を

$$\partial D : z = s(\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

で表す。領域拡大率 $Rq > 1$ を取り、領域外に n 個の電荷点

$$\zeta_j = Rqs\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \quad (1 \leq j \leq n),$$

をとり、境界上に $m = 2n$ 個の拘束点

$$\xi_j = s\left(\frac{2\pi i}{m}\right) \quad (1 \leq i \leq m)$$

を取り、近似等角写像 $f(z)$ を求める。正則関数に関する最大値の原理により、真の等角写像 $f(\hat{z})$ に対する最大絶対誤差を

$$E_R = \max_{z \leq \partial D} |f(z) - f(\hat{z})|$$

で計算する. E_R は領域拡大率 R_q の関数となるので, R_q で最小化したものを採用する. 以上の計算を, 天野のモデルと我々のモデルについて行い比較した. 問題は 3 種, 標本点数は ($16 \leq n \leq 32$) である.

3.1 Cassini の楕形の実験結果

与えられる境界関数は

$$\partial D : z = r(\theta) \exp(i\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$r(\theta) = \sqrt{2 \cos^2 \theta - 1 + \sqrt{(2 \cos^2 \theta - 1)^2 + a^4 - 1}}.$$

であり, 解等角写像は

$$\hat{f}(z) = \frac{az}{\sqrt{a^4 - 1 + z^2}}$$

である. 問題のパラメタ

$$a = 2^{1/2}, 2^{1/32}$$

に関する実験結果を図 1 と図 2 に示す. 天野のモデルとの性能を比較した. 赤線は天野のモデルを示し, 青線は我々のモデルである.

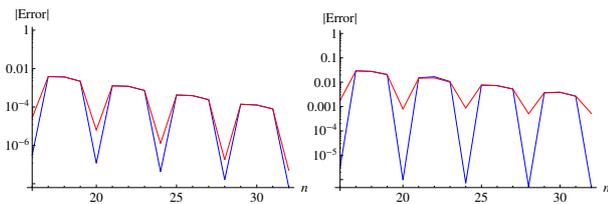


図 1 $a=2^{1/2}$

図 2 $a=2^{1/32}$

3.2 対数関数の実験結果

与えられた境界関数は

$$\partial D : z = \exp(ae^{i\theta}) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

であり, 解等角写像は

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{a} \log(z + 1)$$

である. また, 対数関数を用いた写像関数において, 特異点と拡大境界が重なる関係式

$$R_q^{(a)} = \frac{1}{1 - e^{-a}}$$

を用いて, 前述の推測を元に領域拡大率 R_q の数値を調整する. 問題のパラメタは Cassini の楕形の数値実験と同じである. 実験結果を図 4 から図 6 に示す.

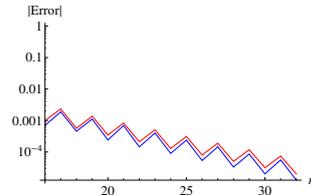


図 3 $a=2^{1/2}$

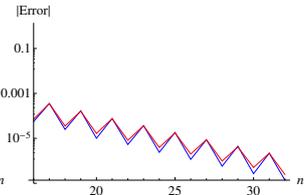


図 4 $a=2^{1/32}$

3.3 偏心円の実験結果

境界は

$$\partial D : z = a + \exp(i\theta) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

であり, 解等角写像は

$$\hat{f}(z) = \frac{z}{az + 1 - a^2}$$

であることが知られている. 問題のパラメタは

$$a = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

について, 2 つのモデルを比較した結果を図 5, 図 6 に示す.

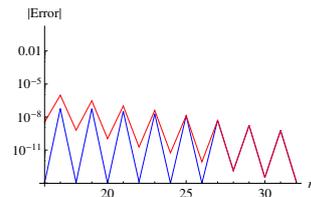


図 5 $a=2^{1/4}$

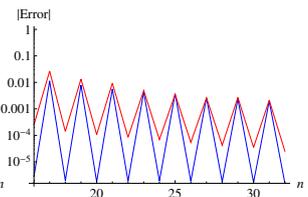


図 6 $a=2^{3/4}$

4 おわりに

今回我々は, 天野のモデルを改良し, 元のモデルとの性能比較を行った. $16 \leq n \leq 32$ で最適な領域拡大率 R_q を見つけ, そのときの最大絶対誤差 E_r を天野のモデルと我々のモデルで求め, グラフに表し性能比較を行った. その結果は, 天野のモデルより精度が向上し, 中には精度が大幅に向上する場合もあることが分かった. 計算量については, 我々のモデルは天野のモデルより複素加算が 1 つ多いだけであるから, 我々のモデルは, 天野のモデルより優れていると言える. さらに, 電荷点 n の値により最大絶対誤差 E_r が大幅に変化することがある.

5 参考文献

- [1] 天野要: 代用電荷法に基づく等角写像の数値計算法, 情報処理学会論文誌, vol.28, No7, pp.697-704 (1987).
- [2] 永田知史: 代用電荷法による等角写像の研究. 南山大学情報理工学部情報システム数理学科 2013 年度卒業論文集 (2013)