球面鏡による 3 次元アナモルフォーシス

2013SE189 島田　愛淑

指導教員：杉浦　洋

1　はじめに

遠近法絵画は，固定された視点によって描かれるもので，これは絵を鑑賞する者の目も不動の一点に固定させせることを意味する．画家の定めた視点の位置に目を置いてみてはじめて正しく見え，その一点をはずれると，歪んで見えてくる．こうした遠近法の性質を逆利用して，絵の正面など通常の視点から見ると歪んで見え，絵の端など特殊な一点から眺めたときだけ正常に見えるように描かれた絵を，アナモルフォーシスと呼んでいる [1].

昨年度は，歪んだ立体模型を円筒鏡によって正常に映し出す研究であったが，今年度は，球面鏡によって歪んだ立体模型をきれいに映し出す研究を行う．

2　球面鏡の幾何光学

今，目の前に球面鏡があり，風景が歪んで映し出されているとする．目と球面鏡の間に，窓があると考える．球面鏡に反射して，窓ガラスの上の点 $\boldsymbol{q}$ を通って目に入る光は，どこからきたのかを調べる．

視点を $\boldsymbol{e}=(e_1,0,e_3)$，窓ガラスの中心を $\boldsymbol{c}=(c_1,0,c_3)$ とする．球面鏡の面の方程式を

$$x^2+y^2+(\mathrm{z}-R)^2=R^2, \tag{1}$$

球の中心を $\boldsymbol{a}=(0,0,R)$ とする．$\boldsymbol{c}$ を見る視線 $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e}=(c_1-e_1,0,c_3-e_3)$ は，窓ガラスと直交している．窓ガラス上の水平方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{u}$，垂直方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする．$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は窓の座標ベクトルであり，$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ は互いに直交である．

$\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであるから，$\|\boldsymbol{u}\|=\|\boldsymbol{v}\|=1$ となる．$\|\boldsymbol{u}\|=1$ を満たすためには，$\boldsymbol{u}$=(0,1,0) とすれば良い．$\|\boldsymbol{v}\|=1$ を満たすために，$\boldsymbol{v}'=(c_3-e_3,0,e_1-c_1)$ を考えると，これは $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{u}$ と直交しているので，$\boldsymbol{v}'$ を正規化して，

$$\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{v}'}{\|\boldsymbol{v}'\|}$$

とすれば良い．このようにすることで，窓ガラスの上の点 $\boldsymbol{q}$ は，

$$\boldsymbol{q}=\boldsymbol{c}+s\boldsymbol{u}+t\boldsymbol{v}$$

と書ける．

また，視点 $\boldsymbol{e}$ からの視線が，窓の中の点 $\boldsymbol{q}$ を通り，点 $\boldsymbol{p}$ で球面鏡に反射して，床の上の点 $\boldsymbol{p}'$ に到達するとする．このとき，床は xy 平面である．

ここで $\boldsymbol{p}=(p_1,p_2,p_3)$ を求める方程式を作る．

点 $\boldsymbol{q}$ を通る視線ベクトルは，

$$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{q}-\boldsymbol{e}$$

となり，点 $\boldsymbol{q}$ を通る視線は，

$$l:\boldsymbol{x}=\boldsymbol{e}+t\boldsymbol{d} \qquad (t\geq 0) \tag{2}$$

となる．(1)，(2) より，点 $\boldsymbol{p}$ の方程式は，

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{e}+t\boldsymbol{d} \qquad (\boldsymbol{p}\text{ は } l \text{ 上にある}), \tag{3}$$

$$p_1^2+p_2^2+(p_3-R)^2=R^2 \qquad (\boldsymbol{p}\text{ は球面上にある}) \tag{4}$$

となるので，(3)，(4) を Mathematica に解かせる．解 $\boldsymbol{p}$ は 2 点出るが，t が小さい (手前の) 点を選ぶ．

次に，点 $\boldsymbol{p}$ で反射した視線ベクトルを求める．点 $\boldsymbol{p}$ における球の外向き単位法線を $\boldsymbol{n}$ とすると，

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{R}(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{a})$$

である．反射の法則により，視線ベクトル $\boldsymbol{d}$ の反射ベクトル $\boldsymbol{f}$ は，

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{d}-2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{n}$$

である．これを正規化したもので置き換えて，

$$\boldsymbol{f}\leftarrow\frac{\boldsymbol{f}}{||\boldsymbol{f}||}$$

とする．反射した視線は，

$$l':\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{f} \qquad (t\geq 0)$$

となる．この t を反射距離という．

l' が床とぶつかる点が $\boldsymbol{p}'$ である．この点 $\boldsymbol{p}'$ から出た光が点 $\boldsymbol{p}$ で反射し，点 $\boldsymbol{q}$ で窓ガラスを抜けて目に入ったということが分かる．

方程式は，

$$\boldsymbol{p}'=(p_1',p_2',p_3')=\boldsymbol{p}+t\boldsymbol{f},$$

$$p_3'=0$$

である．

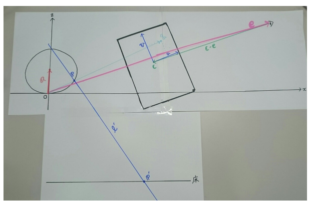

図 1

3 3D プリンターのプリントデータ作製

1. Mathematica で鏡の内部に見たい像を，3 次元図形として作製する．
2. Export 関数で stl データに変換し，stl ファイルとしてセーブする．stl データは，3 次元図形を三角形の面からなる多面体として表現する．
3. Import 関数で stl ファイルを読み込み，GraphicsComplex 形式の 3 次元図データに変換する．これは，stl データと等価で頂点座標と三角面の頂点番号から成る．
4. 頂点座標のデータを鏡像変換する．変換された座標点は，鏡に映されたときに元の座標点に存在するかのように見える．
5. 変換後の座標データと元の面データを統合して，新しい 3 次元図形データを作製する．この図形は，鏡に映されたときに鏡の中の見たい像と重なる．
6. 変換後のデータを Export 関数で stl データに変換し，stl ファイルとしてセーブする．

4 作品紹介

4.1 立方体

1. 半径 50mm の球面鏡に像として納まるよう，立方体の一辺の長さを 20mm とする．この立方体の表面を三角分割する．今回は，一辺を 10 等分した．
2. 立方体の表面の三角形の各頂点 $\boldsymbol{q}$ の球面反射逆像 $\boldsymbol{p}'$ をつくる．その際，反射距離 t を調整して，立方体の底面の逆像が，床につくように計算する．
3. $\boldsymbol{p}'$ を頂点とする三角形で覆われた立体が目指す作品である (図 2 上)．この作品を球面鏡に対して所定位置に配置し，定められた視点から眺めると，球面鏡には正常な立方体が映し出される (図 2 下)．

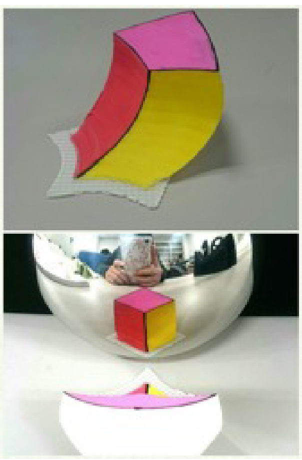

図 2

4.2 ドラえもん

1. ドラえもんの 3 次元データを用意する．今回はドラえもんの stl データをインターネットの無料配布サイトから頂いた [2]．
2. Import 関数でドラえもんの stl ファイルを読み込み，GraphicsComplex 形式の 3 次元図形データに変換する．
3. 頭部が球面鏡の上部につくように，ドラえもんを配置する．
4. ドラえもんの表面の三角形の各頂点 $\boldsymbol{q}$ の球面反射逆像 $\boldsymbol{p}'$ をつくる．このとき反射点を $\boldsymbol{p}$ とする．反射距離は $||\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}||$ の 1.5 倍にする．すなわち，$||\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p}|| = 1.5||\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}||$ である．
5. $\boldsymbol{p}'$ を頂点とする三角形で覆われた立体が目指す作品である (図 3 左)．この作品を球面鏡に対して所定位置に配置し，定められた視点から眺めると，球面鏡には正常なドラえもんが映し出される (図 3 右)．

図 3

5 おわりに

本研究では，3D プリンターにより球面鏡アナモルフォーシス作品を造形することを目指し，球面鏡の反射について幾何光学的に考察した．球面鏡の反射法則により，原像から像への写像を具体的に構成した．そして，予定した鏡像が得られる原像を設計し，それを 3D プリンターで造形した．作品は予定した鏡像 (立方体，ドラえもん) の大きく変形したコピーになっており，非常に滑稽な印象を与える．しかし，実際に球面鏡と作品を所定の位置に配置し，所定の位置から眺めると，立方体やドラえもんがきちんと写しだされて驚きを感じる．

6 参考文献

[1]『鏡に別の絵が映ってる！不思議な「アナモルフォーズ（歪像画）」いろいろ』: http://www.geocities.jp/sakushiart/ana1.htm

[2]『Thingiverse xinkebot doraemon』 http://www.thingiverse.com/thing:1582812