

# 複素円板法による初等関数の正則性判定システムとその応用

2013SE187 柴田 葉里

指導教員：杉浦洋

## 1 はじめに

現代のコンピュータにおいて、高速な数値計算ができるのは、実数を浮動小数点数で近似して計算を行うからである。しかし、近似であるため厳密に正しいことが保証されていない。そこで、計算結果がどのくらい正しいか検算することが重要になってくる。これを精度保証付き数値計算という。

さて、関数の正則性は数学的に重要な概念である。また、複素計算の誤差解析においては、ある領域で与えられた関数が正則であるかどうかは基本的に重要である。したがって、関数の正則性を自動判定するシステムは、精度保証付き計算の基本的な手段となる。また、複素関数を解析するための基本ツールとなる。

加藤 [1] は、四則演算と指数関数、対数関数、正弦関数、余弦関数の円板関数を作成した。指数関数と対数関数については精度の良い Taylor 円板関数を作成した。本研究では、正弦関数、余弦関数の円板関数を Taylor 円板化し、さらに双曲線正弦関数、双曲線余弦関数の Taylor 円板関数を加えた。

作成した円板関数の出力に正則性フラグを付加した。これにより、上記基本関数が入力円板で正則かどうかを知らせる。上記基本関数の合成関数として表される初等関数においても、入力円板で正則かどうかは出力円板の正則性フラグを見ることにより、判定できる。

作成したシステムにより、正則関数の留数を精度保証付きで求めるプログラムを作成した。そして、実際に数値実験することにより有効性を確認した。

## 2 Taylor 円板

正則関数  $f(z)$  の点  $z = \alpha$  における Taylor 展開を

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - \alpha)^k, \quad c_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!} \quad (k \geq 0) \quad (1)$$

とするとき、円板  $D = \langle \alpha; r \rangle$  の Taylor 円板を

$$\hat{f}(D) = \langle f(\alpha); R(r) \rangle, \quad R(r) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| r^k \quad (2)$$

で定義する [2].

[定理 1] (2) の Taylor 円板について、定数  $c > 0$  が存在して、十分小さい半径  $r > 0$  に対して、

$$\langle f(\alpha); R(r)(1 - cr) \rangle \subset f(D). \quad (3)$$

この定理は、Taylor 円板  $\hat{f}(D)$  の半径を  $(1 - cr)$  倍した円板が  $f(D)$  に含まれることを示す (図 1). ゆえに、 $r \rightarrow 0$  とすると、 $(1 - cr) \rightarrow 1$  ゆえ Taylor 円板は内側から  $\langle f(\alpha); R(r)(1 - cr) \rangle$  に押されて  $f(D)$  に接近してゆく。

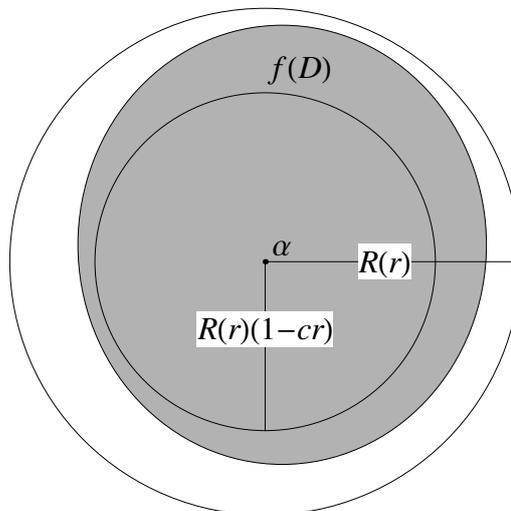


図 1 円板図

今回実装した 4 つの Taylor 円板関数を示す。

$$\widehat{\sin} \langle \alpha; r \rangle = \langle \sin \alpha; R(r) \rangle,$$

$$R(r) = 2 |\sin \alpha| \sinh^2 \frac{r}{2} + |\cos \alpha| \sinh r,$$

$$\widehat{\cos} \langle \alpha; r \rangle = \langle \cos \alpha; R(r) \rangle,$$

$$R(r) = 2 |\cos \alpha| \sinh^2 \frac{r}{2} + |\sin \alpha| \sinh r,$$

$$\widehat{\sinh} \langle \alpha; r \rangle = \langle \sinh \alpha; R(r) \rangle,$$

$$R(r) = 2 |\sinh \alpha| \sinh^2 \frac{r}{2} + |\cosh \alpha| \sinh r,$$

$$\widehat{\cosh} \langle \alpha; r \rangle = \langle \cosh \alpha; R(r) \rangle,$$

$$R(r) = 2 |\cosh \alpha| \sinh^2 \frac{r}{2} + |\sinh \alpha| \sinh r.$$

## 3 留数の精度保証付き計算

留数定理に見られるように、留数は正則関数の解析において重要な役割を果たす。そこで、留数の精度保証付き計算法について考える。

### 3.1 円環領域における留数

点  $\alpha$  を中心とする円環領域  $A: r_0 < |z - \alpha| < r_1$  の閉包  $\bar{A}$  を含む領域  $D \supset \bar{A}$  で正則な関数  $f(z)$  を考える。  $f(z)$  の  $A$  における Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - \alpha)^k,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} \frac{f(z) dz}{(z - \alpha)^{k+1}} \quad (-\infty < k < \infty) \quad (4)$$

とする。ここで  $r$  は  $r_0 \leq r \leq r_1$  を満たす任意の正数である。ここで、 $c_{-1}$  を  $A$  における  $f(z)$  の留数と呼ぶこと

にし、

$$\text{Res}[f; A] = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-\alpha|=r} f(z) dz \quad (5)$$

と書く。

Cauchy の積分定理により、領域  $|z - \alpha| < r_0$  を囲む、 $A$  内の任意の閉曲線  $C$  について、

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i c_{-1} = 2\pi i \text{Res}[f; A]$$

であり、 $\text{Res}[f; A]$  は通常の留数と同様の役割を果たす。また、 $f(z)$  の  $|z - \alpha| < r_0$  における特異点が孤立特異点  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  のみであるときは、

$$\text{Res}[f; A] = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z) dz = \sum_{l=1}^n \text{Res}[f; \alpha_l]$$

である。

### 3.2 留数の数値計算

式 (5) における積分路を  $C: z = \alpha + re^{it} (0 \leq t \leq 2\pi)$  とパラメタ表示すると、 $dz = ire^{it} dt$  だから、

$$\begin{aligned} c_{-1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) rie^{it} dt \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + re^{it}) e^{it} dt \end{aligned} \quad (6)$$

である。

積分区間  $[0, 2\pi]$  の  $n$  等分点  $t_l = 2\pi l/n (0 \leq l < n)$  をとり、積分 (6) を台形則で近似して、

$$c_{-1}^{(n)} = \frac{r}{n} \sum_{l=0}^{n-1} g_r(t_l) e^{it_l} \cong c_{-1} \quad (7)$$

が得られる。

次の定理は  $r = r_* = \sqrt{r_0 r_1}$  と置いたときの近似留数  $c_{-1}^{(n)}$  の精度を保証する。

[定理 2] 式 (7) の  $c_{-1}^{(n)}$  について、 $r = r_* = \sqrt{r_0 r_1}$  と置くと、

$$|c_{-1}^{(n)} - \text{Res}[f; A]| \leq \frac{M_0 r_0 + M_1 r_1}{1 - \rho^n} \rho^n \quad (8)$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} M_0 &= \max_{|z-\alpha|=r_0} |f(z)|, \quad M_1 = \max_{|z-\alpha|=r_1} |f(z)|, \\ \rho &= \sqrt{r_0/r_1} \end{aligned} \quad (9)$$

である。

### 3.3 留数の精度保証付き計算

留数  $\text{Res}[f; A]$  の精度保証付き計算は次の手順で行う。適当な自然数  $n$  を取り、式 (7) で  $r = r_* = \sqrt{r_0 r_1}$  として

$$c_{-1}^{(n)} = \frac{r_*}{n} \sum_{l=0}^{n-1} f(\alpha + r_* e^{it_l}) e^{it_l}$$

の右辺を円板計算する。すなわち、

$$c_{-1}^{(n)} \in \langle \tilde{c}_{-1}; \delta_1 \rangle = \frac{r_*}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \hat{f}(\alpha + r_* \widehat{\exp}(it_l)) \widehat{\exp}(it_l) \quad (10)$$

である。これで、

$$|\tilde{c}_{-1} - c_{-1}^{(n)}| \leq \delta_1$$

が保証される。

式 (8) で  $M_0, M_1$  を含む区間  $M_0 \in [M_0], M_1 \in [M_1]$  を計算する。それを用いて、

$$\varepsilon = \frac{M_0 r_0 + M_1 r_1}{1 - \rho^n} \rho^n$$

を区間計算して、

$$\varepsilon \in \langle \varepsilon_1; \delta_2 \rangle = \frac{[M_0] r_0 + [M_1] r_1}{1 - [\rho]^n} [\rho]^n$$

とする。  $\varepsilon \leq \varepsilon_1 + \delta_2$  が保証される。よって、

$$\begin{aligned} |\tilde{c}_{-1} - \text{Res}[f; A]| &\leq |c_{-1}^{(n)} - \text{Res}[f; A]| + |\tilde{c}_{-1} - c_{-1}^{(n)}| \\ &\leq \varepsilon_1 + \delta_1 + \delta_2 \end{aligned}$$

となる。ここで、最右辺を区間計算すれば、 $\tilde{c}_{-1}$  とその精度保証

$$\text{Res}[f; A] \in \langle \tilde{c}_{-1}; \tilde{\varepsilon} \rangle, \tilde{\varepsilon} = \max([\varepsilon_1] + [\delta_1] + [\delta_2])$$

が得られる。

## 4 おわりに

本研究では、加藤 [1] が作成した、四則演算、指数関数、対数関数、正弦関数、余弦関数に加えて、双曲線正弦関数、双曲線余弦関数の円板関数を作成した。また、正弦関数、余弦関数の円板関数、双曲線正弦関数、双曲線余弦関数を Taylor 円板化した。

具体的な加藤円板システムの改良点を述べる。一つ目は、加藤システムでは、数値を円板化してから円板演算を行っていたが、本システムでは、円板と数値の混合演算ができるようになった。二つ目は、加藤システムでは、正弦関数、余弦関数は指数関数を合成したものを実装したため、円板半径がかなり大きくなってしまっていたが、本システムでは、それらを Taylor 円板化することにより改良した。三つ目は、双曲線正弦関数、双曲線余弦関数を Taylor 円板関数として実装した。

また、留数の精度保証付き計算アルゴリズムを開発した。それに基づいて、Mathematica のプログラムを作成し、数値実験により有効性を確認した。

## 5 参考文献

- [1] 加藤里奈：複素円板法による初等関数の正則性判定システムの構築，南山大学情報理工学部卒業論文 (2016)。
- [2] Petkovic, M. and Petkovic, L. D.: Complex Interval Arithmetic and Its Applications (Mathematical Research), Wiley-VCH(1998)。