Chebyshev 多項式基底を用いた線形計画法による最良有理近似式の構成

2013SE146 野村健太
指導教員：杉浦洋

1　はじめに

計算機のハードウェアは，四則演算と平方根しかできないため，ある区間で任意の関数を計算するときには，四則演算と平方根のみを含む十分な精度の近似関数を使用することになる．通常，四則演算のみからなる近似関数，すなわち，有理関数が用いられる．同じ次数の有理式においては，近似区間における最大絶対誤差が小さいほど望ましい．そのような近似を最良近似と言う．ここでは，四則演算のみを使った有理関数で与えられた関数を近似計算する方法について研究する．有理関数近似を構成する方法は，補間法，Padé 近似などがあるが，次数を固定した場合，最も誤差の小さい最良近似を取り上げる．また，線形計画法に基づいて，与えられた被近似関数の最良有理近似式を求めるプログラムを作成し，それに伴い数値実験を行う．有理式を数値的に取り扱うとき，その分母分子の多項式をどのような基底で展開するかが問題になる．吉戸 [2] は単項式基底を用いている．本研究では，Chebyshev 多項式基底を用いた方法を研究し，単項式基底を用いた方法と比較する．

2　最良有理式近似

区間 $[a, b]$ において，連続関数 $f(x)$ を次数 (m, k) の既約な有理式

$$f_{mk}(x) = \frac{p_m(x)}{q_k(x)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j x^j}{\sum_{j=0}^{k} b_j x^j} \tag{1}$$

で近似する問題を考える．誤差の指標を区間における最大絶対誤差

$$r_{mk} = \max_{a\le x\le b} |f(x) \text{-}\ f_{mk}(x)| \tag{2}$$

とする．次数 (m, k) を固定したとき，最大絶対誤差 r_{mk} を最小にする有理関数近似 $f_{mk}(x)$ をミニマックス近似，あるいは最良近似という．

3　微分補正アルゴリズム

微分補正アルゴリズムは，近似区間 $[a, b]$ に N 個の観測点 $x_i \in [a, b] (1 \le i \le N)$ を取り，

$$r_{mk} = \max_{1\le i\le N} |f(x_i) - f_{mk}(x_i)| \tag{3}$$

を最小とする $f_{mk}(x) = f^*_{mk}(x)$ を求める．観測点の密度が十分高ければ $f^*_{mk}(x)$ は最良近似にきわめて近いと期待できる.(16) は $f_{mk}(x)$ の係数に関する非線形最小化問題であるので，$f^*_{mk}(x)$ の第 s 近似 $f^{(s)}_{mk}(x)$ を改良して，第 s+1 近似 $f^{(s+1)}_{mk}(x)$ を作るアルゴリズムを考える．ここで，

$$r^{(s)}_{mk} = \max_{1\le i\le N} |f(x_i) - f^{(s)}_{mk}(x_i)| \tag{4}$$

とする．微分補正アルゴリズムでは，(3.1) の代わりに，

$$w = \max_{1\le i\le N} \frac{q_k(x_i)}{q^{(s)}_k(x_i)} (|f(x_i) - f_{mk}(x_i)| - r^{(s)}_{mk}) \tag{5}$$

を最小化する $f_{mk}(x)$ を $f^{(s+1)}_{mk}$ とする．$f^{(s)}_{mk}(x)$ が十分 $f^*_{mk}(x)$ に近く，$q^{(s)}_{mk} \cong q^*_{mk}(x) \cong q^{(s+1)}_{mk}$ なら，$q^{(s+1)}_{mk}/q^{(s)}_{mk} \cong 1$ ゆえ，(3.3) の最小化問題は (3.1) の最小化問題の近似問題と考えられる．
(3.3) は制約条件

$$\begin{aligned} wq^{(s)}_k(x_i) + r^{(s)}_{mk} q_k(x_i) - (f(x_i)q_k(x_i) - p_m(x_i)) \ge 0 \\ wq^{(s)}_k(x_i) + r^{(s)}_{mk} q_k(x_i) + (f(x_i)q_k(x_i) - p_m(x_i)) \ge 0 \\ (1 \le i \le N) \end{aligned}$$

の元で w を最小化する．$p_m(x)$,$q_k(x)$ の係数 $a_i(0 \le i \le m)$,$b_i(0 \le i \le k)$ を求める．線形計画法と等価である．//

4　有理式の表現基底

吉戸 [2] は 3 章のアルゴリズムで最良有理式近似を求めるプログラムを作成したが，数値的な不安定性を報告している．吉戸はそれを Mathematica の多倍長演算で克服したが，多倍長演算は非常に計算時間がかかる計算である．数値的不安定性を克服する他の方法として，近似有理式の分子分母を単項式を基底として展開するかわりに，Chebyshev 多項式を基底として展開する方法が考えられる．Chebyshev 多項式基底は，多項式補間の問題を数値的に解く際には，数値的安定性において単項式基底より圧倒的に優れている．

微分補正アルゴリズムを Chebyshev 多項式基底で書き直すことは容易である．有理式の表現基底を単項式基底から Chebyshev 基底に転換して，実際に数値的安定性が改善されるかどうかは，数値実験により確認する．

5　数値実験

区間 $[-1, 1]$ の関数

$$f(x) = \frac{e^x}{16x - 17}$$

を単項式基底と Chebyshev 基底による微分補正アルゴリズムで (m,k) 次最良近似する．この関数は，対称性のない (奇関数でも偶関数でもない) 関数であり，最良有理近似の退化が起こらない．また，整関数でないので次数を上げたときに誤差が急激に小さくならない．

数値計算で求めた近似式の最大絶対誤差には丸め誤差の影響が入る．丸め誤差の影響は，近似式の理論誤差が大きいときにはそれにかき消されて見えない．理論誤差が小さくなると丸め誤差が卓越して誤差の主要部となる．そのときには最良有理近似式が正常に求められなくなる．

次数が $0 \le m \le 10, 0 \le k \le 10$ の範囲で，実験を行った．実験の内容とついて説明する．

1．有理 Chebyshev 補間による初期近似を行う．

有理 Chebyshev 補間を求める．単項式基底と Chebyshev 多項式基底がどちらが安定化を調べる．

最大絶対誤差 r_{mk} を調べ，Chebyshev 多項式基底が単項式基底より優れているときには○，劣っているときには×をつけたものが表 1 である．表の左上部分は理論誤差が卓越しているので，丸め誤差はそれに隠されて両方の基底で同じ結果が得られた．表の右下部分の丸め誤差が卓越する部分との境界で，二つの基底の差が現れる．その全てで Chebyshev 多項式基底が優れていることが分かる．

表の右下部分は丸め誤差の為に，どちらの基底でも最良有理式近似が計算できなくなったので「-」をつけた．

表 1 初期近似の精度

$k\backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2									-	-	-
3							○	○	-	-	-
4						○	○	-	-	-	-
5					○	○	-	-	-	-	-
6				○	○	-	-	-	-	-	-
7				○	○	-	-	-	-	-	-
8			○	○	-	-	-	-	-	-	-
9		○	○	-	-	-	-	-	-	-	-
10		○	○	-	-	-	-	-	-	-	-

2．最良有理近似を微分補正アルゴリズムで作る．

収束するまで改良を行う．収束した段階で最大絶対誤差 r_{mk} を調べる．最良近似の精度を比較し Chebyshev 多項式基底が単項式基底より優れているときには○，劣っているときには×をつけたものが表 2 である．Chebyshev 多項式基底では線形計画問題が解けなくなることは無かったが単項式基底では実行可能解が見つけられずに求解に失敗することがあ．そのようなときには区画に「b」を書く．最良近似においても二つの基底の差が現れるのは表の右上がりの対角線付近である．ここでもほとんどの場合 Chebyshev 多項式基底が優れている．単項式基底では丸め誤差の影響で線形計画問題で実行可能解が存在しないことを表す「b」が多発する．

表 2 最良近似の精度とアルゴリズムの頑健性

$k\backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0											
1											
2				b					-	-	-
3	b							×	-	-	-
4							b	-	-	-	-
5						b	-	-	-	-	-
6					b	-	-	-	-	-	-
7				×	b	-	-	-	-	-	-
8			b	○	-	-	-	-	-	-	-
9			b	-	-	-	-	-	-	-	-
10		×	b	-	-	-	-	-	-	-	-

6 おわりに

最良有理近似式を求める微分補正アルゴリズムにおいて，近似有理式の分子分母の展開に Chebyshev 多項式基底を用いる方法を考案した．Mathematica でプログラムを作成し，倍精度計算の数値実験により従来の単項式基底による方法と比較した．Chebyshev 多項式基底は単項式基底よりやや安定であることが分かった．特に初期近似である補間有理式の計算の安定性の改善は顕著である．どの基底を用いても近似次数を高くすると，数値的不安定性が増大し，適用できる次数の高さには限界があった．残念ながら，Chebyshev 多項式基底によってはその限界を顕著に広げることはできなかった．次数の高い高精度の最良近似式を得るためには，線形計画問題の解法を多倍長化する必要があるが，Mathematica の線形計画問題の解法関数 LinearPrograming は多倍長計算では性能が安定しないので使えない．多倍長で使えるプログラムを自主開発する必要がある．別の選択は，数値的に安定な微分補正アルゴリズムを開発することである．これらは今後の課題である．

7 参考文献

[1] Anthony Ralston and Philip Rabinowitz: A First Course in Numerical Analysis, Second Edition, Dover Publications, New York, 2001.

[2] 吉戸成吾，線形計画法による最良有理近似式の構成，南山大学数理情報学部情報システム数理学科卒業論文 (2012).